

导弹拦截的数学心脏： 追逃博弈通俗指南

胡江平 电子科技大学自动化工程学院

1 追与逃：从古希腊悖论到现代战场

1.1 阿喀琉斯追得上乌龟吗？

想必很多人都听过古希腊的“阿喀琉斯追龟”悖论（又名芝诺悖论）：古希腊英雄阿喀琉斯拥有极快的奔跑速度，却有观点认为他永远无法追上一只慢吞吞的乌龟——每当阿喀琉斯抵达乌龟此前的位置，乌龟便会向前挪动一小段距离（如图 1 所示）。这一延续两千余年的哲学谜题，正是人类对“追逃”问题最早的思考：追逐方与逃避方的位置、速度参数，究竟如何决定这场对抗的最终结果？

这便是本文所探讨的追逃问题（Pursuit-Evasion Problem），它是当前群体智能与控制理论领域的重要研究方向，核心在于分析追逐者与逃避者之间的动态对抗过程。而现代追逃博弈理论的体系化框架，由数学家 Rufus Isaacs 在其经典著作《微分博弈》中首次系统建立^[1]，这也让这一古老的现实问题，从生活现象转变为可通过数学方法进行定量分析的科学研究对象。



图1 阿喀琉斯追龟悖论

1.2 从狼群围猎到导弹拦截

时至今日，追逃问题的应用场景早已超出哲学思辨的范畴，广泛覆盖国防与民用的多个领域：小到自然界中狼群围捕猎物的群体行为，大到战场上的导弹拦截任务——敌方来袭导弹意图摧毁我方侦察机，我方则发射拦截弹实施阻拦；安防领域中，巡逻无人机在禁飞区值守，以识别并拦截闯入的不明飞行器^[2]；地面安保场景下，安保车辆协同守卫重点建筑，防范入侵者靠近；乃至太空中的卫星集群，也会依托该理论分析攻防对抗的策略^[3]。这些看似差异显著的场景，其核心逻辑均为“追”与“逃”的动态对抗，这使得追逃问题成为无人系统、智能对抗领域的核心研究问题之一。

1.3 本指南的阅读地图

本文将目标-攻击者-防御者 (Target-Attacker-Defender, TAD) 博弈为具体实例，在避免复杂公式推导的前提下，通过通俗的理论阐释与直观的示意图绘制，系统介绍追逃问题的建模思路、分析方法，以及速度变化对博弈结果的影响规律。全文的内容安排如下：第2节，介绍三方攻防模型，明确三个角色的任务目标与博弈的胜负判定规则；第3节，介绍追逃问题几何分析的核心工具——阿波罗尼斯圆，作为后续分析的理论基础；第4节，阐述不同初始条件下，三方局中人的最优策略，以及策略区域的划分方法；第5节，分析速度恒定场景下，博弈结果的内在规律；第6节，探讨更贴近现实的变速场景，分析基于能量消耗的速度衰减机制，以及劣势方的逆转机会；第7节，对比两类研究方法，阐明定性分析的实时决策优势；第8节，对全文内容进行总结，并对该领域未来的研究方向进行展望。

2 当博弈不止两个人：三方攻防模型登场

2.1 为什么“猫捉老鼠”不够用了？

早期的追逃问题研究，多聚焦于最简单的两方对抗场景：一方追逐，一方逃避，类似熟知的猫鼠博弈。这类经典的两方对抗框架被称为二人追逃模型。但现实中的对抗场景往往更为复杂，大量场景中存在第三方参与者，使得对抗从单纯的一对一博弈，转变为包含合作与对抗的多角色博弈。

以图2中的导弹拦截场景为例：来袭的敌方导弹是追逐方，意图捕获我方侦察机；侦察机是逃避方；而我方还可发射拦截导弹作为第三方参与者——该拦截弹的任务并非逃避，而是对来袭导弹实施拦截、为侦察机提供防护。在此场景中，侦察机与拦截弹同属防御阵营，二者需要协同配合、共同对抗来袭的攻击者。这类包含合作与对



图2 导弹拦截

抗的复杂场景，无法通过传统的二人追逃模型进行有效描述。

为应对这类复杂的合作对抗场景，研究者们发展出了一系列拓展模型，其中较具代表性的包括到达-规避博弈（Reach-Avoid Game），以及本文重点探讨的 TAD 博弈。TAD 模型恰好对应上述导弹拦截的典型场景，三个角色分别为需要保护的目标、发起攻击的攻击者，以及提供防护的防御者。与传统的二人追逃模型相比，到达-规避博弈虽然引入了更复杂的对抗关系，但在这类模型里，被追击的目标始终是被动的，只能自己逃跑，没办法和保护自己的人配合。而 TAD 博弈模型则弥补了这一缺陷，它引入了和目标结盟的防御者：防御者可以主动去拦截攻击者，目标也可以主动和防御者会合，二者一起配合防御，这就把“合作”的机制真正引入了追逃博弈之中。这一模型不仅完美贴合了导弹拦截、无人机护航等现实场景，还能通过定性方法得到清晰易懂的策略，无需依赖复杂的黑箱计算。由于该模型能够精准贴合现实中大量合作攻防的实际场景，近年来已成为追逃问题领域的研究热点，这也是本文选择以 TAD 博弈为具体实例展开介绍的核心原因。

2.2 认识三个角色：目标、攻击者、防御者

接下来，我们来看看贴合现实的三方 TAD 博弈模型，到底是如何帮助我们分析合作攻防场景的。

这个模型里一共有三个参与者，他们可以对应到我们熟悉的导弹拦截场景里，使我们快速理解各自的角色：

- 目标（Target, T）：我们要保护的对象，比如我方的侦察机；
- 攻击者（Attacker, A）：旨在破坏目标的敌对方，比如来袭的敌方导弹；
- 防御者（Defender, D）：用来保护目标、拦

住攻击者的帮手，比如我方的拦截弹。

假设这三者在二维平面内运动。我们用位置坐标 (x_T, y_T) 、 (x_A, y_A) 、 (x_D, y_D) 分别描述三者的实时位置，分别记三者的最大移动速度为 V_T 、 V_A 、 V_D ，速度方向可由局中人自主调整。为了更清晰地标准化描述三者的速度差距，我们定义两个以攻击者速度为基准的速度比参数：

$$\alpha = \frac{V_T}{V_A}, \quad \beta = \frac{V_D}{V_A}. \quad (1)$$

这两个参数分别代表目标、防御者的速度相对于攻击者的比值。通过该归一化处理，我们可以将三者的速度关系统一到同一尺度下，大幅简化后续的局势分析。

本文的研究聚焦于 $\alpha < 1$ 的博弈场景，也就是攻击者的移动速度快于目标。这是因为如果 $\alpha \geq 1$ ，意味着目标跑得比攻击者还快，此时目标无需防御者的协助，仅靠自身的速度优势就能直接逃离攻击者的追捕，该博弈场景也就失去了现实的研究意义。

2.3 胜负如何定？

这场博弈的胜负判定规则清晰明确，具体可分为两类：

1. 攻击者获胜：攻击者率先与目标发生接触，且在此之前防御者未能拦截攻击者，即攻击成功。
2. 防御方获胜：满足以下任意一个条件即可判定防御方获胜：
 - 防御者率先与攻击者发生接触，成功完成拦截；
 - 目标与防御者率先会合，二者抱团形成防御态势，攻击者无法单独突破；
 - 博弈持续时间超过预设的时间上限，攻击者始终未能完成攻击。

为了完整描述三者的运动局势，我们无需复杂的全量坐标信息，仅需三个关键的状态参数即可：

- 攻击者与目标之间的距离 R ；
- 防御者与攻击者之间的距离 r ；
- 目标、防御者分别与攻击者连线所形成的夹角 θ ，用于描述三者的方位关系。

有了这三个参数，我们就能完整刻画整个博弈的当前局势，无需经过复杂的微分方程推导，就能快速判断接下来的最优策略。如图3所示，我们可以通过这个示意图，直观地理解 TAD 博弈里三个角色的位置与参数关系。

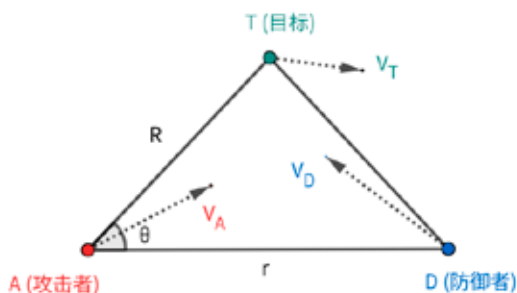


图3 TAD博弈模型示意图

3 追逃的几何直觉：认识阿波罗尼斯圆

3.1 谁先到中点？画个圆就知道了

在正式分析三方博弈的具体策略之前，我们需要先掌握一个关键的几何工具。它能帮助我们在不进行复杂计算的情况下，快速判断追逃双方的位置关系与捕获条件，这便是本节要介绍的阿波罗尼斯圆。

这个看似抽象的几何概念，其实可以用一个非常生活化的场景来理解：假设有两个站在固定位置的人P和Q，P的奔跑速度快于Q。那么，平面上有没有这样的点集：不管P和Q选择往哪个共同方向移动，只要他们同时朝着这个点集中的某个点出发，最终会同时抵达所选择的点？所有满足这个条件的点连在一起，就形成了一个完美的圆形，这就是阿波罗尼斯圆^[4]。这个圆的位置和大小，只由两个人的初始距离以及他们的速

度比值决定，不需要其他复杂的参数。

3.2 一个圆如何判断捕获范围

在追逃博弈的场景里，这个圆的作用就变得格外直观：我们把追逐者的位置作为P，逃避者的位置作为Q，以两者的速度比为参数画出这个圆之后，我们就能立刻得到一个关键结论：这个圆上的所有点，都是追逐者和逃避者能够同时到达的位置。如果追逐者采用平行追击的策略——也就是始终朝着能和逃避者同时到达的方向移动，那么他最终就能在这个圆上的某个点，成功抓住逃避者。换句话说，只要我们画出了这个圆，不用计算复杂的运动轨迹，就能一眼判断出追逐者的捕获范围。如图4所示，我们可以通过阿波罗尼斯圆直观呈现二人追逃的捕获关系。

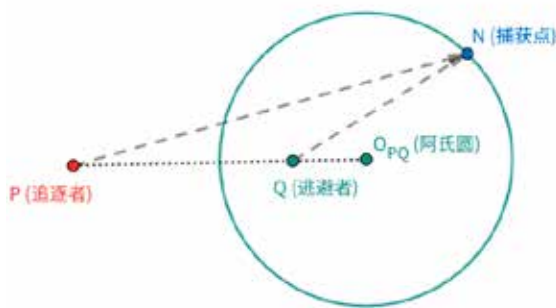


图4 基于阿波罗尼斯圆的追逃捕获关系示意图

3.3 两个圆判定三方局势

这一几何工具同样适用于更复杂的三方 TAD 博弈。此时我们不再仅仅只看一组追逃关系，而是要同时考虑两组：一组是攻击者和目标的追逃，另一组是防御者和攻击者的追逃。这就意味着我们要画出两个阿波罗尼斯圆：一个是攻击者与目标的，用来判断攻击者多久能抓住目标；另一个是攻击者与防御者的，用来判断防御者多久能拦住攻击者。这两个圆的相交关系，能够帮助我们快速判断博弈的最终走向：如果防御者的拦截圆

能够覆盖攻击者的攻击路径，那么攻击者就会被提前拦截；反之，攻击者就能成功突破防御，抓住目标。

4 画出分界线：屏障与策略区域

4.1 三个角色的“招式库”

在这场三方博弈里，不同的阵营、不同的局势下，局中人会有不同的行动选择。我们可以把这些行动归纳为几类标准化的策略，方便我们快速理解。

4.1.1 攻击者的行动选择

作为进攻方，攻击者的核心目标是抓住目标，同时躲开防御者的拦截，他有两种典型的行动选择：

1. 平行追击策略：当防御者的威胁不大时，攻击者会忽略防御者的干扰，直接朝着目标的方向追击，依托我们之前提到的阿波罗尼斯圆的平行追击逻辑，直接冲向预测的拦截点，试图最快地抓住目标。

2. 迂回策略：防御者正好挡在了攻击者的直接追击路径上，此时如果攻击者直接向前逼近，就会被防御者提前拦截。这种情况下，攻击者会先调整自己的运动方向，拉大三者的相对夹角 θ ，绕开防御者的拦截范围，等摆脱了防御者的威胁之后，再转回平行追击，继续去抓目标。

4.1.2 防御者的行动选择

作为防御方的帮手，防御者的核心目标是拦住攻击者、保护目标。根据自身的速度条件，防御者有三类典型的行动选择：

1. 直接拦截策略：如果防御者的速度比攻击者还要快（也就是公式（1）中的速度比 $\beta \geq 1$ ），此时防御者可以直接用平行追击的方法去追攻击者，不需要复杂的配合，就能提前把他拦住。

2. 合作规避策略：如果防御者的速度比攻击

者慢（即 $\beta < 1$ ），他自己追不上攻击者，这时候就需要和目标配合，两个人一起调整位置，缩小三者的相对夹角 θ ，给拦截创造机会，把攻击者逼到没办法绕开的位置。

3. 会合策略：如果直接拦截的风险太高，防御者会选择和目标先会合抱团，两个人凑到一起，使攻击者无法单独完成捕获。这个会合的中间点，必须选在两个阿波罗尼斯圆的相交区域里，保证两个人能在攻击者抓到目标之前凑到一起。这类策略还可以细分为两种：

- 直接会合：两个人直接朝着对方跑，用最快的速度凑到一起；

- 间接会合：如果直接相向而行会暴露在攻击者的攻击范围内，就选一个更安全的中间点，两个人绕开攻击者的路径，再凑拢过去。

4.1.3 目标的行动选择

作为被保护的對象，目标的核心目标是躲开攻击者、配合防御者，他的行动也可以分为两类：

1. 纯粹逃避策略：当防御者有能力拦住攻击者的时候，目标只需要直接朝着远离攻击者的方向逃跑，保证自己不被提前抓到就行。

2. 会合策略：当需要抱团防御的时候，目标会配合防御者，朝着约定好的会合点运动，与防御者聚集到一起，形成防御态势。

4.2 屏障：博弈中的“楚河汉界”

有了这些可选的策略之后，我们怎么知道当前局势下，应该用哪一种呢？这就需要引入“屏障（Barrier）”的概念——屏障就像是地图上的区域分界线，它把整个博弈的状态空间分隔成了不同的独立区域，只要我们判断出当前局势属于哪个区域，就能直接选择对应的最优策略。整个博弈过程中，只要速度不变，大家的策略就不会变，不需要反复调整。

通过采用第3节中基于阿波罗尼斯圆的几何

关系来分析博弈的临界条件，我们可构建出以下四个关键的屏障，用来划分不同的策略区域：

1. B1 优势区域屏障：这是最基础的分界线，它把整个空间分成了攻击者占优和防御方占优的两大块，直接帮我们判断当前局势下，哪一方更有机会赢。

2. B2 攻击者策略切换屏障：这个分界线是给攻击者用的，它只适用于防御者比攻击者慢、且攻击者占优的区域。在这个屏障的一侧，攻击者可以直接用平行追击，不用绕路；在另一侧，防御者挡在了路径上，攻击者必须用迂回策略，绕开防御者。

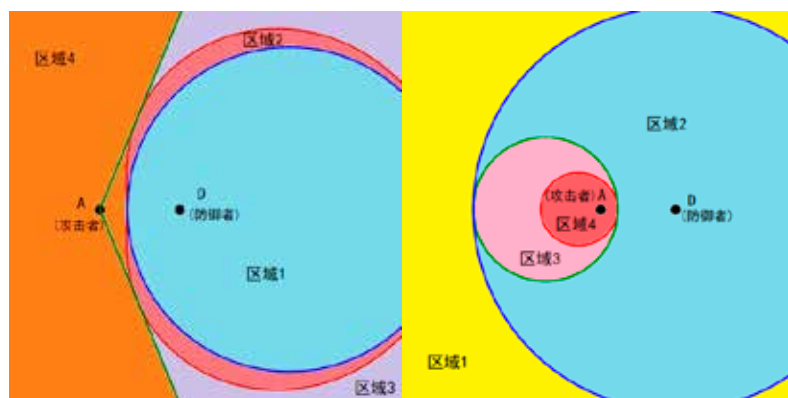
3. B3 防方会合策略切换屏障：这个分界线是给防御方用的，用来判断会合的方式。在这个屏障的一侧，防御方可以用直接会合，两个人直接凑到一起就行；在另一侧，直接会合太危险，必须用间接会合，寻找安全的中间点。

4. B4 拦截 / 会合最优屏障：这个分界线是给速度更快的防御者用的，它只适用于防御者比攻击者快、且防御方占优的区域。在这个屏障的一侧，直接拦截攻击者的效率更高；在另一侧，会合策略会更安全，两个人抱团更好。

4.3 按图索骥：不同区域的策略选择

有了上述四道屏障，整个博弈的状态空间被分割成了不同的策略区域。对于局中人而言，决策变得清晰直观：只需判断当前自身所处的区域，即可直接从4.1节介绍的“招式库”中选取对应的最优策略，无需进行复杂的实时计算。

根据防御者和攻击者速度比 β 的不同，整个状态空间被划分为了四个独立的策略区域，当目标T位于每个不同的区域时，三方的最优策略组合是固定的。如图5所示，我们可以通过这个示意图，直观地看到不同的策略区域与



(a) $\beta < 1$ 策略区域 (b) $\beta \geq 1$ 策略区域

图5 策略区域屏障划分示意图

屏障的划分逻辑。

接下来，通过表1和表2，我们可以直观地看到不同情况下每个区域里的策略搭配。

表1 当 $\beta < 1$ （防御者慢于攻击者）时的策略区域

区域	优势方	攻击者策略	目标策略	防御者策略
1	防方	平行追击	直接会合	直接会合
2	防方	平行追击	间接会合	间接会合
3	攻方	迂回策略	合作规避	合作规避
4	攻方	平行追击	纯粹逃避	直接拦截

表2 当 $\beta \geq 1$ （防御者快于攻击者）时的策略区域

区域	优势方	攻击者策略	目标策略	防御者策略
1	防方	纯粹逃避	纯粹逃避	直接拦截
2	防方	平行追击	直接会合	直接会合
3	攻方	迂回策略	间接会合	间接会合
4	攻方	平行追击	纯粹逃避	直接拦截

简而言之,屏障将复杂的博弈局势浓缩为一张“策略地图”,局中人只需“按图索骥”,即可做出最优决策。

5 局势不变:恒定速度下的博弈规律

此前我们讨论的策略区域划分,均基于一个基础假设:三个局中人的移动速度全程保持恒定。这是我们研究这类合作攻防问题的基础场景,通过仿真分析,我们总结出了若干清晰的规律,可帮助我们快速预判博弈的最终走向。

5.1 开局即定胜负?

在速度恒定的条件下,博弈的胜负在博弈初始阶段即可完全确定。当速度保持恒定时,我们此前提到的屏障,即划分策略区域的分界线,会跟随着局中人的移动而实时调整其位置和大小,但局中人始终不会穿越屏障——换句话说,从博弈开始到结束,局中人所在的策略区域都不会发生变化。因此,仅通过判断三个局中人的初始位置所属的策略区域,即可直接预判博弈的最终胜负:例如在防御者慢于攻击者的情况下,若初始位置处于防御方占优的区域1或2,则无论过程中三者如何运动,最终防御方均可成功守护目标;若初始位置处于攻击者占优的区域3或4,则最终攻击者可成功完成攻击,整个过程不会出现局势反转。

5.2 优势越大,结束越快

在恒定速度场景下,优势程度与获胜速度正相关。若当前局势中某一方的优势越显著,即初始位置与B1优势分界线的距离越远,博弈的持续时间将呈现缩短的趋势。例如,当防御方的优势较大时,则可在较短时间内完成对攻击者的拦截;而当攻击者的优势较大时,也可快速完成对目标的捕获。

5.3 全程不必变招的策略

同样值得注意的是,在整个博弈过程中,局中人的最优策略将保持稳定。由于局中人始终不会穿越屏障,因此在初始阶段选定最优策略后,全程无需调整,也不会切换到其他区域对应的策略。例如,若防御者初始阶段即选择直接拦截策略,那么整个博弈过程中他都会维持该策略,不会中途切换为会合策略。

我们可通过典型轨迹示意图直观呈现这一过程。图6展现了防御者快于攻击者($\beta \geq 1$)的区域2场景下的轨迹示意图,图中红色为攻击者的运动轨迹,蓝色为防御者的运动轨迹,绿色为目标的目标运动轨迹,“×”代表三者的初始起点,“●”代表博弈的最终终点。从图中可以看出,防御者与目标全程均按照初始选定的直接会合策略运动,最终在攻击者完成攻击前成功会合,整个过程中三者的策略未发生任何改变,最终结果与我们对博弈区域的预判完全一致,未出现局势的反转。

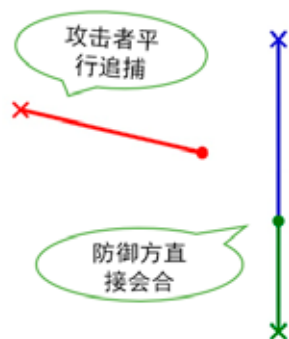


图6 速度恒定下的典型博弈轨迹示意图

6 逆转时刻:速度变化带来的机会窗口

6.1 现实中的体力与油量:速度为什么会变?

之前我们讨论的速度恒定场景,是我们研究这类合作攻防问题的基础假设,但在现实场景中,局中人的移动速度往往无法全程保持不变。无论是动物追逐过程中的体力消耗,还是无人机的电

池、导弹的燃料，都会随着运动不断消耗，进而导致速度发生衰减。这就意味着，实际的博弈过程中，局势是动态变化的，甚至可能会出现我们之前没有考虑到的反转的情况，这也是我们这一节要分析的内容。

为了更贴近现实地模拟速度的动态变化，我们引入了基于能量的速度衰减模型，用来描述能量消耗与速度变化的关系。在这个模型里，我们假设局中人的初始能量为 1，速度与剩余能量之间通过 Sigmoid 函数描述，其表达式为：

$$v(t) = \frac{v_{\max}}{1 + e^{-a(e(t)-c)}}. \quad (2)$$

其中， a 用来控制速度衰减的非线性程度， c 是速度衰减最快的能量点，通常取 0.5。同时，能量的消耗速率与速度的 ψ 次幂成正比，即：

$$\dot{e}(t) = -k_e \cdot v(t)^\psi. \quad (3)$$

模型的超参数可参考相关研究的经验设置^[5]。该模型可以较准确地反映现实中速度的衰减规律：随着能量的消耗，速度会先缓慢降低，之后快速下降，最后再次趋于平缓，符合我们日常的运动经验。为了更直观地理解这个关系，我们可以通过速度 - 时间关系曲线示意图，直观看到速度随能量消耗的变化规律，如图 7 所示。

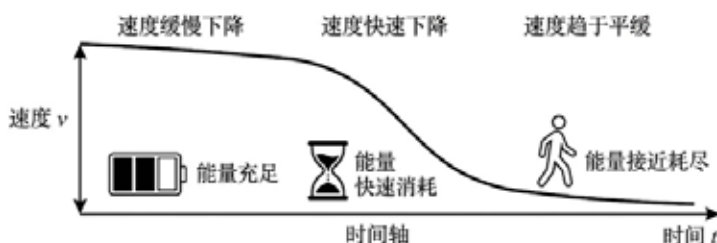


图7 速度随时间的衰减规律

6.2 移动的屏障：速度变化如何改变战局

当局中人的速度发生变化时，我们此前提到的速度比 α 和 β 也会随之改变，这就会导致我们之前说的屏障的位置发生移动。针对这一过程进行详细分析后，我们可根据防御者与攻击者的速度关系，将屏障变化规律分为两类场景^[6]：

1. 当防御者的速度本身慢于攻击者时，此时的策略屏障

包含优势屏障 B1、攻击者策略屏障 B2、会合策略屏障 B3 三类，其变化规律如下：

- 目标速度提升时：三类屏障均会朝远离防御者位置的方向向外扩张。其中 B1 屏障的扩张意味着防御方的优势区域会逐步扩大，攻击者的优势区域不断缩小；B2 屏障的扩张会压缩攻击者平行追击策略的可行空间，即原先可以直接采用平行追击策略的部分区域逐步退化为需要采取迂回等更加保守的策略区域；B3 屏障的扩张则会让防御方的直接会合区域变大。

- 防御者速度提升时：三类屏障同样向外扩张。与目标提速不同的是，B1 与 B2 屏障的交点会逐步移动到无穷远处，这意味着由这两个屏障交点所界定的攻击者的迂回策略空间会随着防御者提速不断缩小，当防御者速度追平攻击者时，迂回策略会直接失效。

- 攻击者速度提升时：三类屏障的变化趋势恰好与前两者相反，全部朝着防御者的位置向内收缩。B1 的收缩会让攻击者的优势范围变大，同时使攻击者的平行追击策略的适用范围大幅提升，B3 的收缩则会不断压缩防御方的会合空间。

2. 当防御者的速度本身快于攻击者时，此时的策略屏障变为优势屏障 B1、会合策略屏障 B3、拦截 / 会合最优屏障 B4，其变化规律如下：

- 目标速度提升时：B1 屏障向内收缩，攻击者的优势区域会逐步缩小

直到消失，最终整个空间都会变为防御方的优势区；但由于 B3、B4 屏障均会向外扩张，这导致出现了一种特殊的“反常”变化：部分防御方原本可以直接会合的区域却退化到了间接会合区域，这意味着目标提速过快，反而会导致直接会合的难度提升，从而调整为间接会合策略。

- 防御者速度提升时：三个屏障均向内收缩，攻击者的优势范围不断缩小；而 B4 屏障的扩张同时意味着防御方的最优策略会从合作会合，逐步切换为直接拦截，因为防御者自身的速度已经足够追上攻击者。

- 攻击者速度提升时：所有屏障均向外扩张，攻击者的优势范围变大；此时防御方的最优策略会反过来，从直接拦截切换为合作会合，因为防御者已经追不上提速后的攻击者了。

这些细分的变化规律打破了“速度越快就一定越有利”的固有认知：对于合作型的防御方来说，单纯的提速不一定能带来优势，反而需要根据对方的速度变化，动态调整自己的策略。比如，当防御方的优势区域随着自身提速不断扩大时，防御方可以采取更为保守的策略，不需要冒险提前拦截，只需要依托扩大的优势范围，稳步推进即可；而当攻击者的优势区域随着自身提速扩张时，防御方就需要立刻调整策略，从原本的拦截转为抱团会合，避免被攻击者突破。

6.3 两种逆转模式

在变速场景下，屏障的动态变化，会给博弈带来局势反转的可能。局中人可能会在博弈过程中穿越屏障，从劣势区域进入到优势区域，从而逆转胜负。这就给原本的劣势方，提供了一个“机会窗口”。根据局势变化的本质，我们可以将反转场景分为两类：

1. 临时机会窗口：稍纵即逝的反杀时机

这类场景的核心是，优势的变化是非单调的：

三者的能量衰减速度不同，可能导致速度比出现波动，原本的劣势方会在某一个短暂的时间窗口里暂时获得优势，但随着速度继续衰减，优势又会回到原本的优势方手中，之后不会再发生变化。例如初始阶段博弈处于攻击者占优区域，但由于其能量消耗更快，导致速度衰减更明显，但在某一时间段内，局势短暂切换到了防御方占优的区域，之后又立刻变回了攻击者占优。这个短暂的时间段，就是我们说的“机会窗口”。如果防御方能抓住这个窗口，采取最优策略，就有机会逆转取胜。

2. 彻底局势反转：慢的一方也能笑到最后

这类场景的核心是，优势的变化是单调的：随着一方的能量持续衰减，屏障会朝着一个方向不断移动，原本的优势会逐步转移到劣势方手中，转移完成后，优势就不会再发生变化，局势彻底反转。例如，原本攻击者占据优势，但他的能量衰减速度远快于防御方，随着时间推移，屏障会逐步从攻击者的优势区，完全过渡到防御方的优势区，之后就再也不会变回去，防御方最终获胜；反过来，如果原本防御方占据优势，但防御方的能量衰减过快，屏障也会逐步过渡到攻击者的优势区，最终攻击者完成反转。

6.4 变速博弈行动指南

面对上述两种不同的反转场景，局中人需要采取不同的应对策略。

对于第一种“临时机会窗口”型场景，作为劣势方的阵营，需要做的就是：第一，实时监控屏障的变化，精准识别出这个短暂的窗口，一旦窗口出现，立刻切换到当前区域的最优策略，不能沿用之前的劣势策略；第二，在窗口内，可以通过短时透支能量加速，或者临时补充能量的方式，把短暂的优势稳住，避免被对方再次反超，只要能在窗口内完成拦截或者会合，就能完成逆

转。

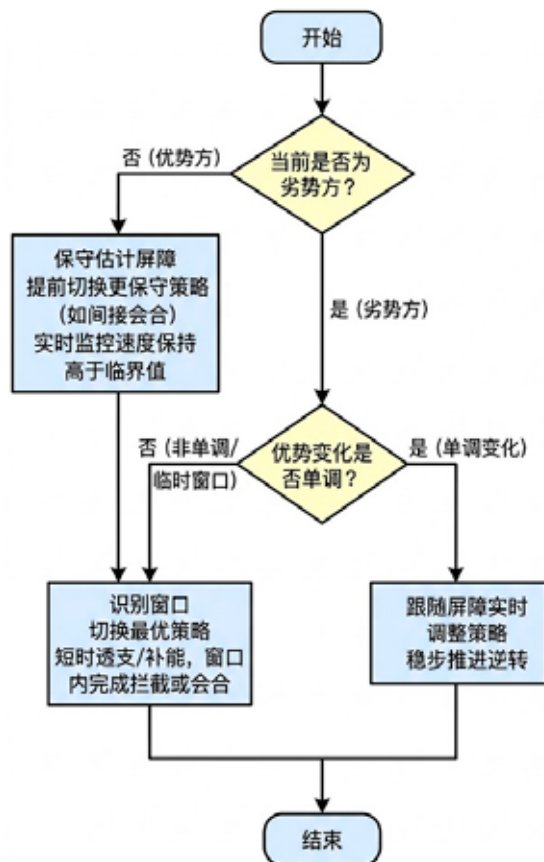


图8 变速博弈局势判断流程图

对于第二种“局势彻底反转”型场景，双方的应对方案则有所不同：对于原本的劣势方来说，不需要等待短暂的窗口，只需要跟着屏障的变化，实时调整自己的策略，依托逐步扩大的优势，稳步推进，就能最终完成逆转；对于原本的优势方来说，需要提前对屏障做保守估计，不能按照当前的速度做判断，要预留出自己速度衰减的余量，提前调整策略，比如从原本的直接拦截策略，提前切换为更保守的间接会合策略，同时实时监控自己的速度，保证自己的速度始终高于局势反转的临界值，避免把优势拱手让人。

由此可见，速度衰减给劣势方提供了逆转的

机会，也给优势方提出了新的要求，双方都需要根据屏障的动态变化，实时调整自己的策略。针对不同的反转类型，局中人可以通过判断自己当前的形势来选择对应的应对方案，如图8所示，我们可以通过局势判断流程图，直观看到不同局势下的应对逻辑。

7 背后的工具箱：为什么这种分析又快又准？

7.1 两条路：定量计算 vs 定性画图

当前，针对追逃问题的研究已形成两类成熟的主流思路，分别为定量研究方法 with 定性研究方法，二者针对不同的场景需求，发展出了差异化的技术路径。

定量方法的核心逻辑，是通过构建性能指标函数（如捕获时间、能量消耗等），将追逃问题转化为标准化的最优化问题，进而求解局中人的最优控制策略。近年来，随着人工智能技术的快速发展，该类方法常与深度学习、强化学习等技术结合，通过与仿真环境的交互迭代训练，获得复杂场景下的近似最优策略。

与之相对，定性方法并不关注具体的捕获时间、能量消耗这类量化代价，而是将研究重点放在博弈双方的优势区域划分上。该类方法的核心思想，是通过构造被称为“屏障”的半透性曲面，将整个博弈的状态空间分割为捕获区与逃生区两类独立区域。对局中人而言，无需进行复杂的优化计算，只需判断自身当前所处的区域，即可直接选择对应的最优策略。

7.2 “黑箱”还是“白箱”？

从实际应用的角度来看，定量方法的突出优势在于场景适配性强，能够有效处理高维状态空间、非线性动力学、大规模多智能体等复杂场景，这也让它在复杂集群对抗的研究中得到了广泛应

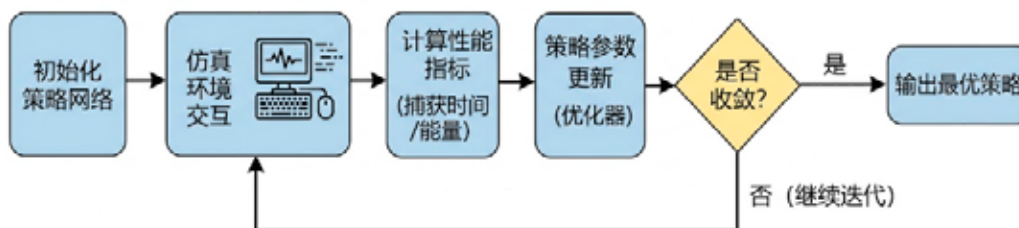


图9 定量研究方法

用。但该类方法也存在显著的局限：一方面，训练过程需要大量的计算资源与数据支撑，对硬件的要求较高；另一方面，通过数据训练得到的策略往往缺乏可解释性，类似“黑箱”——研究者仅能验证该策略的最终效果，却无法清晰阐释策略的内在逻辑；同时，复杂的模型推理过程，也难以满足高实时性的决策需求。

定量方法的典型研究流程依托数据驱动的迭代优化（如图9所示），通过不断的试错调整策略参数。

7.3 实时决策的秘密：几何分析的力量

与定量方法形成鲜明对比的是，定性方法的核心工具包括几何分析法（如第3节介绍的阿波罗尼斯圆）以及庞特里亚金极大值原理。依托这类工具，研究者可以得到显式、解析形式的控制策略，这也让该类方法拥有了计算量小、可解释性强的突出优势：策略的逻辑清晰可见，且决策过程仅需简单的区域判断，能够满足实时决策的需求。

定性方法通过屏障划分状态空间（如图10所示），局中人可依托区域判断直接完成决策。

7.4 为什么导弹拦截偏爱这种方法？

回到本文关注的导弹拦截场景，这类场景对决策的实时性有着极高的要求——来袭导弹速度极快，拦截窗口稍纵即逝，系统必须在极短时间内给出清晰可靠的指令。在这种条件下，定量方

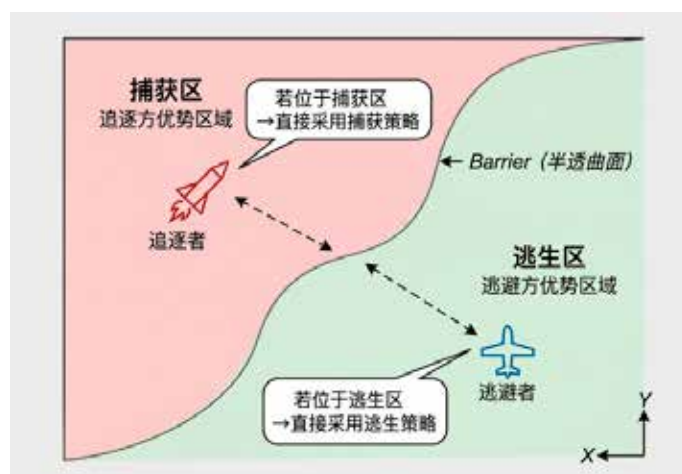


图10 定性研究方法

法所需的复杂模型推理与迭代优化过程往往来不及完成，而定性方法只需预先划分好策略区域，实际决策时仅需判断当前局势属于哪个区域，即可立刻调用对应的最优策略。这种“零延迟”的决策方式，恰好契合了导弹拦截的核心需求。

正是基于这一考量，本文选择以定性几何分析的思路来解决TAD博弈问题。通过前文介绍的阿波罗尼斯圆与屏障划分方法，我们得以在不依赖复杂计算的前提下，清晰地揭示三方博弈的内在规律——无论是恒定速度下的胜负判定，还是变速场景下的逆转机会，都可以通过简洁的几何工具得到直观的解释。这也正是本文所采用的研究方法能够在保证可解释性的同时，完美适配高实时性决策场景的根本原因。

8 结语：追逃博弈的未来

8.1 回顾核心思想

本文针对合作攻防场景下的三方追逃博弈问题，结合定性几何分析的研究思路，以TAD博弈为具体实例，系统介绍了追逃问题的建模逻辑、分析工具与决策规律。从追逃问题的两类研究方法对比，到作为几何基础的阿波罗尼斯圆原理，再到三方博弈的角色划分、策略选择，以及速度恒定与变速场景下的博弈规律，我们逐步拆解了这类合作对抗问题的内在逻辑。其中，基于屏障的策略区域划分方法，以及速度变化下的局势反转规律，是本文介绍的核心内容。前者通过简单的区域判断，就能让局中人快速选择最优策略，无需复杂的优化计算，完美适配了高实时性的决策需求；后者则打破了“速度越快就一定越有利”的固有认知，揭示了劣势方依托速度衰减实现局势逆转的可能，为实际攻防决策提供了全新的思路。

8.2 从二维到三维，从三方到集群

由于篇幅所限，本文仅针对二维平面上的三方博弈场景展开了介绍，未能进一步探讨三维空间、多智能体集群对抗等更复杂的场景，也未考虑更复杂的动力学约束与能量恢复机制，难免存在一些疏漏。未来可以进一步探索将该方法与深度强化学习等先进技术结合，在保留定性方法可解释性的同时，拓展其对复杂场景的适配能力；同时，也可以进一步研究更复杂的能量动态变化机制，为无人系统的攻防决策提供更高效、更智能的策略支撑。

参考文献

[1] Isaacs R. Differential games: A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization[M]. Courier Corporation, 1999.

- [2] Luo H, Tan G, Yan H, et al. Cooperative line-of-sight guidance with optimal evasion strategy for three-body confrontation[J]. ISA Transactions, 2023, 133: 262–272.
- [3] Wei Y, Liu T, Wei C. Mode-switching cooperative defense strategy for the orbit pursuit-evasion-defense game[J]. Defence Technology, 2025, 44: 272–286.
- [4] Dorothy M, Maity D, Shishika D, et al. One apollonius circle is enough for many pursuit-evasion games[J]. Automatica, 2024, 163: 111587.
- [5] Zhang S, Liu M, Lei X, et al. Stay-eat or run-away: Two alternative escape behaviors[J]. Physics Letters A, 2019, 383(7): 593–599.
- [6] Zhang Y, Hu J. Modeling and analysis of Target-Attacker-Defender game for variable-speed players[C]. 2025 44th Chinese Control Conference (CCC), IEEE, 2025: 1016–1021.



【作者简介】胡江平，于2000年、2004年在兰州大学分别获得应用数学专业学士、计算数学专业硕士学位；于2007年在中国科学院数学与系统科学研究院获得复杂系统与控制专业博士学位。2007年至2008年在瑞典皇家工学院数学系从事博士后研究。2008年起，就职于电子科技大学自动化工程学院，现为该学院教授、博士生导师。研究方向为多智能体系统协调控制、机器人智能控制、复杂系统优化与决策等，代表性工作包括：通信受限多智能体系统的动态反馈控制、合作-竞争系统群体行为分析与控制、不确定异构系统的最优控制。