

趣谈 p -范数 ——

《系统与控制理论中的线性代数》教学感悟 I

邹云 南京理工大学

古希腊时期，数学是生动的、人文的。人们是灵巧的、理性的。后来，数学的城堡逐渐迷失在符号的森林里。然后，以邂逅了数学城堡为分水岭，人们被分成了两类：呆子和脑瘫。其中比较典型的，分别称作理工科与文科。

——云中散人

一、序：丢在角落里许久了的跋

厌倦了修仙小说虎头蛇尾的想象力，忽然便有了意愿想坐下来写点东西：一些花费大块时间的东西。这个春天有些寒冷。阵阵蛙鸣自楼下的水塘中传来，于这瑟瑟的寒意却很有些不真实的感觉。我，一个散人，离开了云端，在写书。写一本关于线性代数的书，给工科研究生阅读。

一直以来，都在讲解黄琳先生的数学专著《系统与控制理论中的线性代数》：一部这里的数学系也不讲授的数学专著，却是讲给工科学生的。这一讲，居然已二十年多了。说起来，这门课程的设置纯属偶然。

记得那一年，我跟随导师从自动控制系到了工程热物理系，继续完成我的博士学位论文。然后，留下来做了教师。那些年，博士也非常少，与我同年入学的博士研究生全校只有9人，7人获得学位，而教师待遇极低，大都不愿留校任教。因此，相对于现在的留校难度，那是不可比的。

可留校是留校了，却留在了工程热物理系。系里没有与控制理论对口的本科专业、也没有涉及控制学科成规模的研究生群落，学校课程的开设与管理又归口各系。因此，除了理论研究并协助导师指导研究生，工作量考核都一时堪忧。可想而知处境之窘迫。按我那时的自嘲，是在“拿

着渔网在草原上捕着羊羔”。

这时，自动控制系的一位前辈师长找到我，期望我能以黄琳先生这部专著为蓝本、给控制工程的研究生开设一门正式课程。就这样，开启了理科数学的工科研究生教学体验。无疑，这一直都是一个巨大的挑战。

大学数学，为什么会被学生觉得比较难？就读大学本科的时候，就在想这个问题，无解。读了博士，看了许多闲书，终于有了点感想，但也只是感想。做了任教的教师，就不能只是感想，而是必须有所措施、并付诸于实践。

记得在诡异迷茫而又伤感忧郁的《香草的天空》里，随着声声轻柔温婉的“Open your eyes”，汤姆·克鲁斯饰演的大卫·阿姆斯每次醒来：依旧是同样的房间、同样的早晨，却每次都是不一样的世界、不一样的因果循环。他陷入的是从头到尾的困扰。其实，新的世界，若缺乏与熟悉的世界之间的联系与体验，则多数只是被接受、罕有能够被理解。

大学数学，也是这样。按照传统教材中的体系，她与小学算术之间缺乏内在逻辑关联，与中学数学之间也缺乏方法论的对接。而将部分微积分内容下放到中学，也只不过使断点提前到了高中，而非消除了断点。她更缺乏与日常生活的鲜活逻辑联系。她就像一座孤悬在生活大陆之外的异域世界：被闷罐封着瞬间塞进去，艰难地熟悉适应着，然后又瞬间切换回了原出发地。而所谓的教师，不过就是那一声声的“Open your eyes”……有的尚算得轻柔，更多的则是乏味、甚至刺耳。

然而，在古希腊时期，数学不是这样的。她是生动的、人文的。人们是灵巧的、理性的。后来，她的城堡逐渐迷失在符号的浩瀚森林里。于是，不知从何时起，人们就以数学城堡为分水岭被分作了两类：呆子和脑瘫。其中比较典型的，分别

称作理工科和文科。

于是，如果尝试从古希腊思想出发、从小学算术逻辑起步、从日常生活的视角看去，大学数学是怎样的图景？这成为我试图将“Open your eyes”变作大卫·阿姆斯不顾众人规劝、于摩天大厦顶上为回归现实而“纵身一跳”的实验。虽然一如《香草的天空》的片尾，这一切最终还是在声声轻柔的、与之前一模一样的“Open your eyes”中掩卷结束。我是教师，不是么？但毕竟还是跳了、跳过了。

于是，便有了二十多年的教学体验，有了编写一本未必会成功、却一定会很另类的研究生讲义的设想：说给工科生的理科生的线性代数，作为我多年教学生涯的总结。也算作是写给自己和自己同类的非主流教师的些许笔记。

窗外的蛙鸣依旧，这个春天有些寒冷。



图1.1 香草的天空

“Open your eyes……”

这是N年前就着手编写的研究生讲义《尝试说给工科研究生的理科生的线性代数》的跋。很遗憾，散人真的是懒散惯了，直到今天也还没有完成它的第一章。散人老了，面对着Office的界面，感觉数学公式和几何图形它太难输入了。拿着学生倍加推崇的LaTeX软件与说明，颓废长叹这个世界的新鲜东西它太外星人了。

说起讲给工科生的理科数学，散人集二十多年的教学体会，深切地感觉到，横亘其间的一道天堑是工科与理科的内涵造就的两种截然不同的思维方式的对立与不相容。工科形象思维：把握总体 $\Rightarrow$ 灵活细节；理科抽象思维：严谨细节 $\Rightarrow$ 构建总体。由是，理科遭遇工科，满眼尽皆不严谨，读了等于没读，看不下去。工科遭遇理科，满纸一通抽象符号，半天不知在干啥，无法理解。借用一下加缪的世界·人生荒谬说¹：工科思维不荒谬，理科思维也不荒谬，工科生遭遇理科教材才荒谬的。

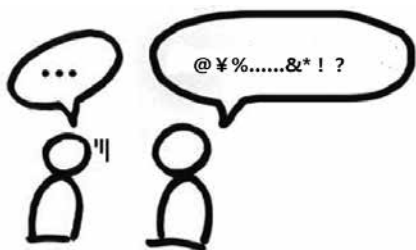


图1.2 他好荒谬啊……

因此，工科研究生的数学教学，必须打破他们难以将纯粹与严谨的抽象数学概念衔接至形象化思维方式的瓶颈，以提供一个数学抽象体系的管窥楔入点。在投给《系统与amp;控制纵横》的稿件里²，散人曾经从日常生活的角度趣说过二阶系统的阻尼概念和众所周知但却显得完全另类的脉冲函数 $\delta(t)$ 。这里则从散人期末考试的A卷中的一道试题说起，就有限维线性空间 p -范数之间的差异漫话一二，以馈感兴趣的读者。

二、与 p -范数：佟湘玉 vs 金香玉

研究生，从入学那一天起，就要意识到自己是个研究生了。——云中散人。

散人线性代数A卷试题（0—100分）：热播电视剧《武林外传》里有这样一个情节。佟湘玉问展堂：“我和金香玉谁更好？”展堂不假思索：“当然你更好！”湘玉问：“咋个好法？”展堂说：“把你比作学生，那是门门80以上啊！”湘玉问：“那金香玉呢？”展堂说：“她？几乎门门不及格。”湘玉奇怪了：“那你们怎么个个都往她那里跑？”展堂一边等不及地往外跑一边说：“架不住她有一门100分啊！”试用你本学期学到的线性代数理论诠释这个现象。从中你得到怎样的人生启迪？



图2.1 啥？金香玉几乎门门不及格！

这道题满分值是100分。有许多年，试卷都分A卷和B卷，学生选做一卷。B卷是常规试卷，但卷面分数原则上94分封顶，个别非常优秀的可以稍加突破。A卷则是非常另类的，原则上是为各种类型的聪明学生准备的。题目包括主观、客观和主-客观三个类型，每个类型1—2题。主观类题目侧重于测试学生对相关线性代数概念的理解深度。客观类题目则是具有相当难度的标准数学问题，一般是给出一个全新的数学概念，然后给出一个用这个新概念描述的命题，要求学生严格证明。主观-客观类题目则需要学生自己根据题意建立自己的数学模型，然后严格证明或彻底

¹ 世界不荒谬。人生也不荒谬。人活在世上才荒谬的。——加缪。

² 截至目前尚未发表。

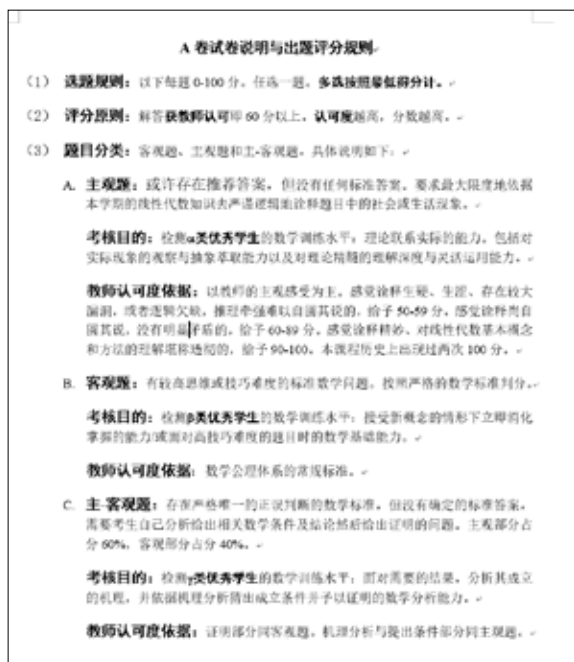


图2.2 A卷评分标准

解决。

不管哪个类型的题目，每题都是 0—100 分。任选一题解答。多选题按获最低得分的题目计分。

前面介绍的题目属于主观题类别。主观题评分标准由教师掌握。只要感觉运用了线性代数知识，且勉强能自圆其说，就及格了。而自圆其说得不错，确实有点道理的，就 80 分了。若运用线性代数理论具体明确，诠释得逻辑清楚、体系自洽，符合生活常识的内涵，还很有新意或独立见解，那就满分了。

通常，选择 A 卷的人很少。而且很遗憾，这道题无一人选择。事实上，它是用来测试学生对向量 p -范数差异的个性化理解的。同时，也试图让学生通过这一过程思索：门门 80 分以上的佟湘玉，会被几乎门门不及格但有一门 100 分的偏科生金香玉完败这一现象后面，是怎样的一种数学刻画。

针对这个问题而言，那就是要思考并回答：

(1) 两个不同的人，怎样才会是更吸引人的？(2) 这个问题与线性代数理论有什么关系？事实上，优化就涉及度量，而度量与范数密切相关。因此，只需考虑清楚如何针对第一点提取要素、并用恰当的范数予以描述即可。这么说起来还真不太难。

将一个人吸引人的诸多因素，看作是一组标准向量基底。这样的因素很多，这里仅选取三个主要的：颜值、情商和财富，分别记做 x 、 y 、 z ，而其系数 α 、 β 、 γ 则看作是相应的分值，那么它就可被大致地看作是一个由多项式 $\theta = \alpha x + \beta y + \gamma z$ 表征的向量空间 $S = \{\theta(x, y, z): \theta \in \mathbb{R}^3\}$ 。

显然，试题中展堂们对 θ 使用了无穷范数 $\|\theta\|_\infty$ 。并且依据佟湘玉的银幕颜值和性情形象，剧情暗示了那位始终未出场的金香玉的情商或颜值是 100 分了。

我怎样了？我很正常啊



图2.3 她脾气差、不聪明，可是……她好好看哦……

按照这个情况，以无穷范数论，哪怕佟湘玉再优秀，只要没有接近满分的突出点，都不如金香玉更有吸引力了。然而，若使用了其它范数，比如 1-范数或者 2-范数，结果就完全相反了。如果金香玉一门 100 分，两门不及格（哪怕放大到 60 分）。则就算佟湘玉门门只是 80 分，她的 1-范数和 2-范数也要比金香玉要高，1-范数较明显，但 2-范数相对更接近了一些：

$$\|\theta_T\|_1 = 240 > 220 = \|\theta_J\|_1$$

$$\|\theta_T\|_2 \approx 138.56 > 131.15 \approx \|\theta_J\|_2$$

3-范数和4-范数就更接近了：

$$\|\theta_T\|_3 \approx 115.38 > 112.71 \approx \|\theta_J\|_3$$

$$\|\theta_T\|_4 \approx 105.286 > 103.093 \approx \|\theta_J\|_4$$

值得注意的是在4-范数下，即便金香玉有两门是0分，其范数值和佟湘玉的差异也不算很大。这时候只要金香玉一门勉强及格并还有一门70以上，就要胜出了。这还只是4-范数。可见 p 值越大，越强调有特色。反之越强调全面发展，其中以1-范数为甚。毫无亮点的三门40分也比极端偏科的两门0分一门满分强。2-范数要好得多。很平均发展的人，要想和极端偏科生相比能好上那么一点，至少三门都得勉强及格就行了。

那么有限维线性空间范数等价性定理又怎么解释呢？这个定理是说对有限维线性空间而言，取定任何两种范数 $\|\cdot\|_u$ 和 $\|\cdot\|_v$ ，都存在大于0的常数 a 和 b 使得对这个空间里的任何向量 θ ，都有 $a\|\theta\|_u \leq \|\theta\|_v \leq b\|\theta\|_u$ 。很显然，这是一个不等式的等价关系，对数学分析的拓扑刻画作用而言它们是等价的。在描述极限关系 $\theta \rightarrow \theta_0$ 时，无论使用哪种范数 $\|\cdot\|$ ，只要 $\|\theta - \theta_0\| \rightarrow 0$ 结果都是一样的。即便如此，在实际应用中还是存在诸多不同点的。比如1-范数计算简便但通常没法求导，而2-范数就没有求导的困难。

无穷范数虽然也不光滑，但只需要恰当打压冒头的分量就可以将总体偏差控制到理想的状况。古人总结的许多人生哲理，如枪打出头鸟、



图2.4 无穷范数……它太凶残了

雨朽出头椽、木秀于林风必摧之，以及攻其必救和擒贼先擒王等兵法谋略等，都可看作是运用无穷范数进行拓扑规划的案例。

三、 p -范数的人生启迪：缺陷与特色

毁掉一个人的最好方式，是让他追求完美。——白岩松⁴。

发现并喜欢自己，是我们的生存责任。——云中散人。

我们的内心里，不说每一个人，也总是大多数人期望自己能够方方面面出类拔萃的。我们都在做优化、最优化。然而，在同一领域生存的群体里，只有别人感觉安全了，我们自己才会真正安全。



图3.1 白岩松：这孩子，毁得差不多了

³ 课堂上，散人给工科研究生解释无穷维线性空间 l_p 范数的不等价性，使用无穷级数的例子很好诠释。不过，忍不住扩展其眼界而尝试提及作为广义函数的 $\sin(nt)$ 在弱*拓扑下当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于0时，每次面对的都是一片惊呆了的眼神！于是打趣：一度称为冲激函数的脉冲函数，就是这样从他们0时刻被惊呆了的眼神 $\varphi(t)$ 里激发出来的： $(\delta(t), \varphi(t)) \triangleq \int \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$ 。 $t > 0$ 很久了，他们每个人的眼神 $\varphi(t)$ 还是被冲激算子 $\delta(t)$ 凝固在了冲激时刻的 $\varphi(0)$ 。

⁴ 微信公众号“洞见”，2019年7月19日。

可别人感觉安全了，就是说我们被超越了。我们被超越了，我们也就失去了不可替代感。我们的生存就有了危机感。这样，安全了就没有了安全感，获得了安全感就不再安全。这很有趣，也很严肃。由是，选择怎样的优化度量方式才能向纳什均衡的生存态演化就成为一个十分严肃的问题了。



图3.2 安全感：人生不可或缺的元素

(1) 要感谢自己的缺陷和不足。

因为缺陷，因为不足，我们被许多人相容，甚至在众人的优越感中被傲慢或怜悯地忽略和宽容。记得有一则心灵鸡汤说：世上每个人都是被上帝咬过一口的苹果，都是有缺陷的。有的人缺陷比较大，因为上帝特别喜爱他的芬芳⁵。这是在治愈因缺陷过于严重而带来的心灵创伤。是的，我们每个人或多或少、或轻或重都有不尽人意的固有缺陷和先天不足。可我们要知道：那是属于我们自己的缺陷和不足。感谢它、喜欢它吧。我们的存在因它而获得安全。

(2) 要发现自己的特长和天分。

我们要生存，我们就需要资源。更多的资源。因此，从众多的领域、诸多的方面里，发现自己



图3.3 呃，刚才这几个咬得多了点……

的特长和天分，无论这个领域或方面在世人眼里是如何地卑微，那都是我们自己的特长和天分。努力发展，努力超越，成为一定程度和范围里的不可替代。这就是特色。而特色是最好的生存基础。

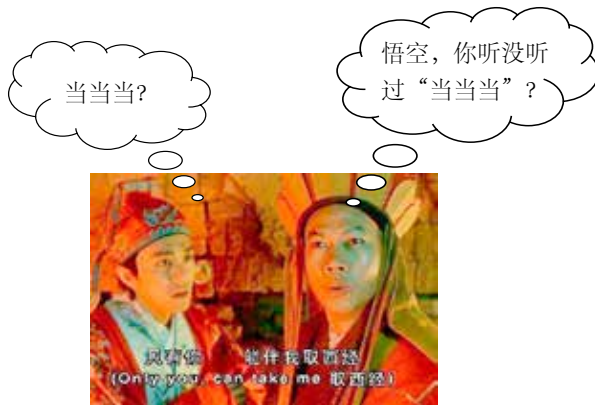


图3.4 Only You

综合(1)(2)，不难得到这样的两个感悟（就是本节开篇的两句话）：白岩松的“毁掉一个人的最好方式，是让他追求完美”以及散人的“发现并喜欢自己，是我们的生存责任”。

这个世界上，没有竞争对手的人，是不可能存在的。而到处都是竞争对手的人，是无法持续生存的。记得有一则心灵鸡汤是这样说的：乞丐

⁵ 林丝缎，每个人都是上帝咬过的苹果，《格言》，2008年6期46页。

并不羡慕比尔盖茨，他们嫉妒周边比他们乞讨得更成功的乞丐。而天妒红颜、天妒英才的说法更是自古有之。



图3.5 云中散人：发现并喜欢自己，是我们的生存责任

人生高度复杂。毫无疑问地，它是本质非线性的。但至今未被实质性超越的牛顿无穷小分析方法说明：人类的理性思维方式是分段时空地线性化的，并且只能考虑和处理非常有限的因素。因此，当优化我们的人生时，我们只能是分段时空地进行。因而有限维线性空间的 p -范数是实际生活中最常用的度量指标。

高考成绩，无疑是 1-范数。事实上，中学应试教育抑或原先的教育部学科专业评估，都是如此。不过是空间基底可能增减变更，加权有所不同。事实上，设 x_i 和 ρ_i 分别是评估的要素和权值，则 $\|\rho^T x\|_1$ 也是范数。它可视为一类广义的 1-范数，不妨称作佟湘玉范式。这里， x 和 ρ 分别为以 x_i 和 ρ_i 为分量的列向量。

而现下的学科与专业建设、高级人才计划乃至职称评定已经开始与实际生活常识靠拢：强调特色。也即金香玉范式。以 p -范数来衡量，显然 $p \geq 2$ 了。无穷范数毕竟极端了点，但在残酷的竞争中，它常常也会被用作作为一种强化手段来优化自己的实际生存竞争力。各类职业强化培训、大学专业以及研究生研究方向，就是这样的一个衡

量结果。这个过程中又不断有强调交叉与联合的声音。这是一种试图在去功利化的基础上利用无穷范数做优化的趋势。

说到人生的复杂性，记得曾有一年，散人的一道线性代数 A 卷主观试题是：

试用本学期学过的线性代数理论诠释情感世界不会是简单的。

很遗憾，还是没有人选择。

其实，运用线性空间的八条性质去检验情感世界的子世界——少男少女的情爱世界，就很容易发现它连一条也不满足。相遇定义为加法，修饰印象定义为数乘，那么加法的交换律、结合律都不会成立。也没有零元。会有这样的一个人，使得任何人与其相遇都和从未相遇一样？当然不可能。自然，也不会有负元：不会有可以让我们真的重新开始的存在。



图3.6 让我们重新开始……

至于数乘对加法的分配律、数乘的分配律与结合律也不成立。对两个人同时示好与分别私下示好的结果是不一样的。逐步建立好印象或者对好印象再做加强和不管不顾地一次性展示效果也是不一样的。后者很可能会被误以为是嚣张炫耀。同时，不会存在对任何人来说修饰和不修饰都完全一样的表现。

因此，情感世界高度非线性。而课堂上，散

人多次反复强调：这个世界只有线性是简单的。复杂的事物首先是非线性的。这个题目是测试研究生对线性的本质理解是否达到了某个触类旁通的程度的。一道题 100 分。可惜了。

不过，关于 p -范数的题目，第二年在课堂解剖时，有一位同学非常感兴趣。提问：“人生主要方面有 N 多个，如果以无穷范数来衡量，我是 100 分。但以 1-范数衡量，我是 $N00$ 分。这个会有什么问题的么？我应该怎么办？”

哦？好问题！这是要从系统与控制的角度思考人生了。

其实，自古就有关于藏拙策略的哲学思辨。《庄子·山木》里，一棵大树枝叶茂盛，樵夫却不砍伐，因为“无所可用。”庄子说：“此木以不材得终其天年！”翌日，又见童仆杀鹅。有两只鹅，一只只会鸣叫、一只不会鸣叫。主人说：“杀不能鸣者。”因不成材殒！庄子因而感悟：生存之道当“处乎材与不材之间。”

按现代系统与控制学术语，庄子所感悟的大抵上是：藏拙，是一种纳什均衡生存策略。从他一脸看似天真得不要不要的笑容里，略一思忖，便知道他提出这个问题的时候，其实已经有了答案。无疑，这是个非常聪明的学生。

“哦？真能有这样的好事，就别让它变成坏事。该怎么办？你说呢？下课！”

这是一堂有趣的代数课。散人喜欢聪明学生。数学，尤其是系统与控制理论中的数学，是人文的。



图3.7 抱朴守拙，行稳致远



【作者简介】邹云，1962 年生。南京理工大学教授、博士生导师。1983 年于西北大学数学系获理学学士学位，1990 年于南京理工大学动力工程学院获工学博士学位。现为中国自动化学会名誉理事，江苏省电机工程学会常务理事，美国《数学评论》评论员，美国国家数学学会终身会员。近期研究兴趣为：对象结构-控制器一体化设计，智能电网运行与控制等。