数学和物理系统中的对偶性漫谈（四）

谢柏松　北京师范大学

1. 引言

在对偶性漫谈系列文章的一开始[1]我们说："对偶性（Duality）始终贯穿在数学和物理学的发展中，从最早的关于时间和频率、空间和波数的傅里叶变换到经典的电动力学，从相对论与量子力学到量子电动力学，从现代数学中的同调群理论，和现代物理中的超弦理论，再到黑洞物理，以及目前仍在探索的暗物质与暗能量的物理，无不闪耀着对偶性的光芒。可以这么说，对偶性原理已经成为数学和物理学中为数不多的几个基本原理之一，同时也是人们理解我们赖以生存的这个奇妙宇宙中规律的一个强有力工具，她的意义还在发展与进一步探索之中。"

漫谈[1]已经对一些数学系统、经典力学、相对论和量子力学以及物质与场等的对偶性做了回顾与评述，也通过一些例子展现了她的魅力。在漫谈文章[2]中我们对量子电动力学、弦论和超弦理论、黑洞物理学，以及目前仍在探索的暗物质与暗能量物理中的对偶性也做了较为详细的介绍。在漫谈文章[3]中我们进一步举例和阐明了物理学中对偶性存在的概念性发展、对偶性原理以及对偶性的现代理论。我们增加了拉格朗日与哈密顿力学、电磁学、热力学与统计物理、圈量子引力和拓扑凝聚态物理的例证。

值得注意的是，对偶性既是复杂系统之间具有内在关系的对应或者是具有同构性的特质，同时通过她还能实现对系统具体行为的某种控制或操作[4]。例如关于质量起源问题，众所周知的是希格斯机制，即真空通过"希格斯"标量场自发地破缺了一些规范对称性从而使得无质量的粒子获得了质量。但还有第二个见解，它来自物理学的另一个领域，它似乎与第一个既有联系又有不同，由于弦理论内部一致性要求世界片上具有共形对称性，这一要求却阻碍了在统一理论中物理现实的质量的出现。然而，当弦论被抽象为"共形场论"的研究，并应用于二维材料的二阶相变的研究时，可以看出，热的简单应用打破了控制临界温度下行为的共形对称性。显然这与后面我们将要介绍和讨论的高温/低温的对偶性以及自

对偶下的临界行为等密切相关。对偶性与系统控制的另一个例子是在对偶性意义上系统的耦合常数是可以互相倒易的：当控制耦合常数的运行时，其消失意味着规范耦合常数不需要再重整化。这适用于电学和磁学公式，这意味着“狄拉克量子化到底适用于裸耦合常数还是重整化耦合常数？”就不是一个问题了，因为在对偶性意义上它们是相同的。

这次的对偶性漫谈将对三个方面的对偶性做更深入细致的介绍与评论：一个是关于电磁学的对偶性；第二个与弦论中的对偶有关，特别是 Seiberg-Witten 的理论；第三个则是来自于凝聚态物理中的对偶性。

电磁对偶是一个非常古老的概念，可能早于麦克斯韦方程组[4]，最近几十年引起了人们的极大兴趣。这不仅是因为它综合了许多迄今为止来自不同研究领域的各种有趣的思想方法，并力求得到具有三维空间和一维时间的自然时空，而且因为其简单且深刻的基础性特点和悠久的历史传承等优势，在数学和物理方面都有取得进一步突破的潜力。

正如我们在漫谈[1]中已经提到过的，在弦论和超弦中存在众多不同的各种对偶及其背后美妙而深刻的物理图像。例如 T-对偶，S-对偶（即强弱对偶），U-对偶，H-对偶（即全息性对偶），以及反德西特空间与共形场论之间的对应性，即 ADS/CFT 对偶等。因此对偶性对弦论的发展起到过至关重要的作用[5]，并已被证明是求解非平凡 D=4 超对称场论，即 Seiberg－Witten 模型[6]的一个极其强大的工具。

另一方面 Fendley 和 Saleur 证明了各种（1+1）维量子杂质系统显示出自对偶的精确形式[7]，这非常类似于 D=2 情况下伊辛（Ising）模型中著名的 Kramers-Wannier 对偶关系[8]。他们通过在某些超椭圆曲线上用围道积分来表达相关的量来实现这一点，且与 Seiberg-Witten 结果相似。

下面我们将对以上三个领域的对偶性进行更充分的阐述和理解。在此之前，为了加深印象，我们再次回顾一下在漫谈[3]中提到的关于什么是对偶性的一个概念性的描述：在《数学物理百科全书》[9] 中由 Lozano 撰写的“Duality in Topological Quantum Field Theory”中，他是这样介绍什么是对偶的：“对偶的概念是一些物理学和数学领域最引人注目的最新突破理论的核心。广义上讲，对偶性（在物理学中）是同一物理系统不同（通常是补充）描述之间的一种等价性。典型的例子是电磁（阿贝尔）对偶性。其他更复杂的有，例如各种弦理论的对偶性，如 T-对偶（它的更为特殊的实现是镜像对称）和强/弱耦合的 S-对偶，以及场论对偶——比如 Montonen－Olive 对偶和 Seiberg－Witten 有效对偶”。显然这一概念性描述有助于加深对对偶性的深入理解。

2. 电磁对偶性

首先我们来看一下直观的电磁理论在几何和物理之间的对偶性关系，如图 1 所示。显然，数学中微分几何里的联络和曲率概念对偶于物理中电磁理论里电磁场的电势和场强，而且约束条件的雅可比恒等式和作为外微分精确形式的场强一定是闭形式，这两点就给出了麦克斯韦方程组。

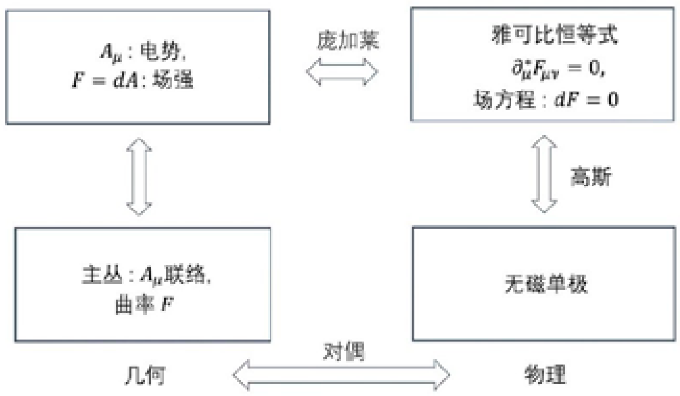


图 1 电磁理论几何与物理的对偶性关系

众所周知麦克斯韦理论在对偶算子下是不变的，也就是说在时空的任何一点上如果没有自由的电荷和磁荷，我们有两个对偶对称的麦克斯韦方程组 dF=0 和 d*F=0，其中 2 阶场强张量 F 是 1 阶张量势 A 的外微分，即 F=dA；而*F 是 F 的对偶场强。它们的矩阵表达式可以写成

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \text{和} \quad {}^*F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

不难看出，*的对偶算符是 $E \to B$，$B \to -E$。

1995 年，David I Olive 发表了他的著名文章《精确的电磁对偶性》(*Exact Electromagnetic Duality*)[4]，其核心的思想与观点是：将电磁对偶旋转对称性扩展到携带电荷和磁性电荷的物质的问题上。

首先假设物质可以被视为由携带典型电荷 q 和磁荷 g 的经典点粒子组成。然后，很容易将源电荷或磁荷包括在麦克斯韦方程的右侧，并通过受广义洛伦兹力的单个粒子的运动方程来补充，当然实现这一点所要付出的代价是要包含至今尚未观测到的磁电荷，或者说要假定自由磁荷的存在。因此，我们必须假设未能观测到磁电荷可能的原因要么是由于相关的磁荷有非常大的质量，要么是由于其他尚未知晓的原因。

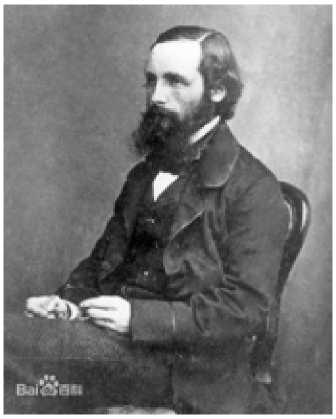


图 2 麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831—1879）（图片来自网络）

从经典理论转向量子理论，我们立即发现物质波函数的电磁耦合需要引入规范势，这一过程在存在磁荷的情况下并不简单。然而，在 1931 年，狄拉克克服了这一困难，并表明磁荷的引入可以与量子理论相一致，前提是其允许值受到限制[10]。他的结果是，磁荷 g 在存在电荷 q 的情况下必须要满足它们的乘积在 Planck 常数的单位上是 2π 的整数倍，即 $qg=2\pi n\hbar$，此即著名的狄拉克电荷/磁荷的对偶性及其量子化条件。

正如他所指出的，这种情况产生了惊人的后果：如果磁荷 g 存在于宇宙中的某个地方，即使没有被观测到，那么任何电荷都必须以单位 $2\pi\hbar/g$ 的整数倍出现。这种电荷的量子化确实是自然界的一个特征，这种解释实际上是迄今为止发现的最好的解释。

Olive 指出狄拉克电荷/磁荷的对偶性及其量子化条件存在一个问题，即它无法保持要满足麦克斯韦方程组关于复数形式电磁场（$E+\mathrm{i}B$）的旋转对称性所必须要求的复数形式荷（$q+\mathrm{i}g$）同样要满足的旋转对称性。这表明狄拉克导出的电-磁荷量子化条件并不完全正确，因为尽管狄拉克的论点无可挑剔，但在所考虑的情况中隐藏着一个假设。为了克服这一困难，Olive 找到了一个同时具有电荷和磁荷且自洽的量子场论。他假定携带磁荷的结构由理论本身来决定，因此其质量取决于所携带的电荷与磁荷。正如 Maxwell 能量密度遵循电磁场的旋转对称性一样，他期望这个质量与电磁荷的依赖关系也遵循电-磁荷的旋转对称性，因此有 $M(q,g)=M(|q+\mathrm{i}g|)=M\left(\sqrt{q^2+g^2}\right)$。

该理论的可能量子态携带 q 和 g 的值，当在复 $q+\mathrm{i}g$ 平面[即具有笛卡尔坐标(q,g)的平面]中绘制时，它们形成整数晶格。忽略可能的双荷子（Dyon），单个粒子状态将对应于该晶格的五个点。光子和希格斯粒子对应原点（0,0），重规范粒子 $W^{\pm}$ 对应点（$\pm q_0$，0）。因此，由原始“电”作用中的基本场产生的粒子位于实数的电轴上。磁单极子孤子 $M^{\pm}$ 则位于（0，$\pm g_0$）处的虚数的磁轴上。顺便说一句，对于既携带了电荷又携带了磁荷的双荷子，狄拉克量子化的规则将变成如下的威腾量子化规则：$q_1g_2-q_2g_1=2\pi n\hbar$。

现在，如果我们按照狄拉克电-磁量子化条件的电荷到磁荷的变换，并在 $q+\mathrm{i}g$ 平面上旋转一个直角，

上面描述的五个点将被重新排列。这表明，由作用中存在的场产生的 $M^{\pm}$理论的“对偶”或磁性公式也将是类似的自发破缺的规范理论，但耦合常数由狄拉克电-磁量子化条件下电荷-磁荷的变换关系所改变。在这个新的公式中，$W^{\pm}$粒子将取代 $M^{\pm}$以孤子的形式出现。以上便是 Montonen-Olive 电磁对偶猜想的原始形式[11]。

李淼在他的科普著作《超弦史话》[12]里对 Olive 和 Montonen 关于电磁对偶性理论发展的历史有过精彩的描述。这里把相关的文字摘录如下：“第二次‘革命’远较第一次‘革命’延伸得长(1994—1998)，影响也更大更广。有意思的是，主导第二次‘革命’主要思想，不同理论之间的对偶性(请注意这不是我们已提到的散射振幅的对偶性) 已出现于第一次‘革命’之前。英国人奥立弗(Olive) 和芬兰人曼通宁(Montonen) 已在 1977 年就猜测在一种特别的场论中存在电和磁的对称性。熟悉麦克斯韦电磁理论的人知道，电和磁是互为因果的。如果世界上只存在电磁波，没有人能将电和磁区别开来，所以此时电和磁完全对称。一旦有了电荷，电场由电荷产生，而磁场则由电流产生，因为不存在磁荷。而在奥立弗及曼通宁所考虑的场论中，存在多种电荷和多种磁荷。奥立弗-曼通宁的猜想是，这个理论对于电和磁完全是对称的。这个猜想很难被直接证明，原因是虽然磁荷存在，它们却以一种极其隐蔽的方式存在：它们是场论中的所谓孤子解。在经典场论中证明这个猜想已经很难，要在量子理论中证明这个猜想是难上加难。尽管如此，人们在 1994 年前后已收集到很多这个猜想成立的证据。狄拉克早在 1940 年代就已证明，量子力学要求，电荷和磁荷的乘积是一个常数。如果电荷很小，则磁荷很大，反之亦然。在场论中，电荷决定了相互作用的强弱。如果电荷很小，那么场论是弱耦合的，这种理论通常容易研究。此时磁荷很大，也就是说从磁理论的角度来看，场论是强耦合的。奥立弗-曼通宁猜想蕴涵着一个不可思议的结果，一个弱耦合的理论完全等价于一个强耦合的理论。这种对偶性通常叫做强弱对偶。”

Olive 还详细讨论了精确电磁对偶与模群的联系。这里我们做些简单的介绍。事实上，Schwinger 推广了狄拉克的离散量子化的电-磁荷条件（可以看作是电磁对偶的耦合常数之间的变换关系）。如前所述，由局部态组成的 $q+ig$ 的值的粒子应该位于复平面中的晶格点上。这种晶格结构是电荷守恒定律和 CTP 定理所要求的：一组允许的值必须在平移和符号反转的情况下是不变的，因为这些操作可以通过组合状态和 CTP 的共轭性在物理上实现。粗略地说，是电荷晶格描述了物理现实，而作用量的选择对应了格中基矢的选择，即一对不共线的基元矢量（或一对周期）。作为二维的电荷晶格，意味着这些选择与模群的作用量有关，这个模群是包含了先前狄拉克电磁荷对偶变换的无限形式的离散群。

关于模群 $SL(2, Z)$，众所周知，它的共形变换是 $w=(az+b)/(cz+d)$，其中 a, b, c, d 都是实数，且满足 $ad-bc=1$。通常认为模群由下面两个生成元 $w=z+1$ 和 $w=-1/z$ 所产生，更多的时候是写成$T:\tau\to\tau+1$ 和$S:\tau\to-1/\tau$。可以证明复上半平面 H 经过它们的共形映射后仍为 H。T和 S 的物理意义也是很显然的，前者使得转动了一个2π角或等价地，绕数 n 增加了 1，后者即是电磁对偶的狄拉克规则，或者等价地，耦合常数互为倒数。这也可以看作是一般性的强弱 S 对偶的一个特例。图 2 给出了关于 S 的一个直观的示意图。

根据以上描述的结果，电磁对偶在 $N=4$ 超对称 SU（2）规范理论中也是可以实现的，在该理论中，希格斯场获得了非零真空期望值。该理论是闵可夫斯基时空中极少数精确共形场论之一的变形。

因此，电磁对偶已经成为解开强耦合量子规范理论和弦论结构的有力工具。在许多 N=1 和 N=2 超对称的理论中，对偶性表现为有效低能量描述的对称性，它在红外动力学中发挥着重要作用。另一方面，在 N=4 理论和一些特殊的 N=2 理论中，电磁对偶是精确的，因为它在所有能量尺度上都有效。

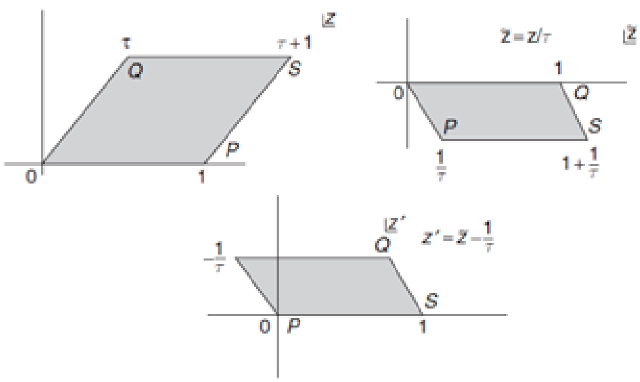


图 3　一个保角映射序列，表明参数为 τ 的环面保角等价于参数为 − 1/ τ 的环面。

Olive 认为，精确电磁对偶的潜在有效性意味着至少在四维量子场论理论中，它比与之相联系的量子力学和经典场论的总和还要丰富得多。这是因为新的对偶与对称性本质上是量子的，没有经典的对应物。此外，它还将理论的强耦合和弱耦合机制联系起来。因此，有关电磁对偶性的新见解还在发展，其内容直到现在还在进一步研究中。

我们从电磁对偶中能够学到如下一些关键性的东西：它需要磁单极子，规范理论中单极子的存在与紧 U(1)规范群的存在密切相关，磁电荷由拓扑量-绕数给出，它属于 U(1)的第一个同伦群，电磁对偶意味着 C 不变性，双荷子的电荷和磁荷位于二维晶格上,且可以向超对称量子场论扩张，并于模群有关。

由于这些理论中的额外结构和增加的对称性，对偶性的概念激增，这一切都可能被认为是阿贝尔电-磁对偶的推广（Schwarz，1997）。它们被命名为 Seiberg–Witten 对偶、S-对偶、T-对偶、镜像对称等等。

尽管自然界似乎没有表现出精确的电磁对偶性，但现实化的理论总是有精确理论的影子，哪怕是其有些破缺了的版本，另外，在精确理论中，存在丰富的结构能够以 Seiberg 和 Witten 所倡导的方式来解释夸克禁闭等一些难题。因此下面我们就专门讨论一下著名的 Seiberg-Witten 理论及其中的对偶性问题。

3.　Seiberg−Witten 理论及其中的对偶性

1994 年，Seiberg 和 Witten（见图 4）考虑和解决了超对称情况下非阿贝尔规范理论中的电磁对偶性[3,6,14]。

在文章[13]中，通过提出两种不同的规范理论（不同的规范群和夸克表示），在四维情况下证

明了 N=1 超对称非阿贝尔规范理论中的电磁对偶性，从而得到相同非平凡的长距离情形下的物理。一种理论的夸克和胶子可以解释为另一种理论下基本场的孤立子（非阿贝尔磁单极子）。一个理论的弱耦合区域被映射到另一个理论的强耦合区域。当其中一个理论被夸克的期望值希格斯化时，另一个理论则是禁闭的。在禁闭描述下的无质量胶球、重子和阿贝尔磁单极子则是对偶的希格斯描述下弱耦合的基本夸克（即带禁闭的夸克孤立子）。

图 4 Nathan Seiberg 和 Edward Witten（图片来自网络）

李淼在他的科普著作《超弦史话》里[12]也对 Seiberg 和 Witten 理论发现的历史有过精彩的描述，也对其中的对偶性做了充分的说明。这里把相关的文字摘录如下：

"对对偶性做出很大贡献的一个人是洛特格斯大学(Rutgers University) 新高能物理理论组的塞伯格(Nathan Seiberg)。他也是 1989—1992 之间研究两维弦论（又叫老的矩阵模型）非常活跃的人物之一。然而他见机较早，回到矩阵模型发现以前第一次超弦革命后遗留问题之一，超对称及超对称如何破坏的问题。这里每一个专业名词都需要整整一章来解释，我们暂时存疑留下每一个重要词汇在将来适当的时候再略加解释。弦论中超对称无处不在，如何有效地破坏超对称是将弦论与粒子物理衔接起来的最为重要的问题。塞伯格在 1993－1994 之间的突破是，他非常有效地利用超对称来限制场论中的量子行为，在许多情形下获得了严格结果。这些结果从量子场论的角度来看几乎是不可能的。科学史上最不可思议的事情之一是起先对某种想法反对最烈或怀疑最深的人后来反而成为对此想法的发展推动最大的人。威顿（Edward Witten）此时成为这样的人，这在他来说不是第一次也不是最后一次。所谓塞伯格-威顿理论将超对称和对偶性结合起来，一下子得到自有四维量子场论以来最为动人的结果。这件事发生在 1994 年夏天。

1995 年是令弦论界异常兴奋的一年。一个接一个令人大开眼界的发现接踵而来。施特劳明格(Andrew Strominger) 在上半年发现塞伯格-威顿 1994 年的结果可以用来解释超弦中具有不同拓扑的空间之间的相变，从而把看起来完全不同的'真空'态连结起来。他用到一种特别的孤子，这种孤子不是完全的点状粒子，而是三维的膜。威顿 1995 年 3 月份的工作中，以及两个英国人胡耳（Chris Hull）和汤生（Paul

Townsend）在 1994 年夏的工作中，就已用到各种不同维数的膜来研究对偶性。这样，弦论中所包含的自由度远远不止弦本身。”

实际上 1994 年 Seiberg 和 Witten [14]提出了对于 N=2 规范理论的低能有效理论，Seiberg 和 Witten 设法计算了 N=2 超对称 SU（2）Yang-Mills 理论的低能量威尔逊有效作用。这个有效作用是根据所谓的前置势给出的，它是超对称多重态中包含了标量场的真空期望值的函数。最重要的是，N=2 超对称性约束的前置势为多态射函数，即多值解析函数。另外阿贝尔规范理论和 N=4 超对称规范理论在量子理论相同的意义上表现出精确的电磁对偶性，其中耦合常数可以进行 $SL(2, Z)$变换。

与在 Montonen-Olive 意义上被认为是完全自对偶的 N=4 的 SYM 理论不同，N=2 的 SYM 理论不可能是自对偶的。值得注意的是，“基本”场属于 N=2 矢量多重态，而磁单极子属于 N=2 标量多重态，即 N=2 超多重态。然而，N=2 理论仍然具有有效对偶性。

Seiberg-Witten 的思想[14,15]是引入了一个辅助亏格为 1 的黎曼曲面（椭圆曲线），其模空间可由复上半平面 H 模去 $SL(2,Z)$的商群所精确的给出，并且其周期“矩阵”（或椭圆模）预先是规范耦合。由于黎曼曲面理论中众所周知的“黎曼二次关系”，该辅助构造自动保证了 Zamolodchikov 度量（Imτ>0）的正定性。

此外，在 Seiberg 和 Witten 的精神下，很自然地将 Calabi-Yau 流形 G（在该 G 上紧化的 II 型超弦中）的复结构的模空间 M（G）中所谓的锥奇点解释为来自 BPS（稳定）无质量带电超多重态。后者在弦理论中通常被解释为带电的无质量黑洞。已知的对偶弦论提供了一些例子，其中一个理论中的经典模群表现为对偶理论中的量子模群，从而在弦论框架下将经典模和量子模联系了起来。因此，扩展到超对称规范理论的 Seiberg-Witten 方法可以以非常自然的方式被进一步提升到超弦的理论中。

正如 Ketov 所总结的[15]：弦理论中的 S-对偶是作用于复数（膨胀）场的，并且它与强耦合和弱耦合有关。它给出了合理的期望，即一个强耦合弦论很可能由另一个弱耦合弦论来表示。紧的超环有另一个目标空间的对偶，这被称为 T-对偶，它通常由非紧离散群表示。T-对偶群和 S-对偶群的 $SL(2, Z)$实际上是一个更大的非紧离散群的子群，这就是 U-对偶。U-对偶的大群似乎是隐藏的非紧连续对称性下的一个离散子群，其非紧连续对称性已知存在于点粒子极限 $\alpha\to 0$ 情形下由紧超弦引起的扩展了的超重力理论中。例如，在四时空维度上的 N=8 最大扩展超重力就具有非紧全局对称性 E7（一种例外李群），而在相应的（紧）II 型超弦理论中，有证据表明存在作为 U-对偶群的离散群为 E7 群。

4. 统计力学和凝聚态物理中的对偶性

统计力学中最早发现对偶性的研究工作是 1941 年由 Kramers 和 Wannier 完成的[16]，这就是著名的 Kramers-Wannier 对偶性。它是二维 Ising 模型的关于低温有序与高温无序的 ordered-disordered 对偶。该模型只有最近邻位置的自旋有相互作用，其相互作用强度与温度的比值为一个无量纲参数 K，通过标准的配分函数以及单位自旋的自由能研究发现高温和低温下的参数 K 之间，有一个漂亮的对偶关系式：$\sinh(2K^*)\sinh(2K) = 1$。显然当两者相等时，即在 $K=K^*=K_c=\ln(1+\surd 2)/2=0.44069$ 处，这便是发生相变

的转变温度的临界点。

注意，对偶映射 $\sinh(2K^*)\sinh(2K)=1$ 不仅将低温区域与高温区域连接起来，反之亦然，即 $K\leftrightarrow K^*$：

在这个意义上，它是强耦合状态和弱耦合状态之间的映射。此外，它也是对合 $K^*(K^*(K))=K$。在这个意义上，这一对偶性的特点事实上跟上两节描述的 $SL(2,Z)$的模群变换关系，以及生成子的对合与对易律都是一致和相似的。例如，如果记 $s\equiv\sinh(2K)$，则 $s\to s-1$。而映射 $f:s\to -s$ 与 $g:s\to 1/s$ 显然是正合和可对易的：$f\circ f=\mathrm{id}=g\circ g, f\circ g=g\circ f\to(f\circ g)\circ(f\circ g)=\mathrm{id}$，其中的 id 是恒等映射。

顺便说一句，1952 年，Potts 推广了 Ising 模型[17]，即每个自旋可以具有 q 个值，其对偶性仍然存在，这时临界温度对应的 $\mathrm{Kc}=\ln(1+\sqrt{q})$。对于 q=3,4，相变是二阶的，而对于 q>4，相变则是一阶的。

1999 年 Gaetano Bertoldi 的进一步研究[5]发现 Seiberg-Witten 理论和 Pott 模型之间通过模函数的相似性有内在的联系：在被研究系统的对称性和对偶性的变换下模函数是不变的，这就意味着不同类型的有效温度的分类可以由带有三个窟窿的复数球来刻画，这三个窟窿的位置在+1，－1 和无穷远处。

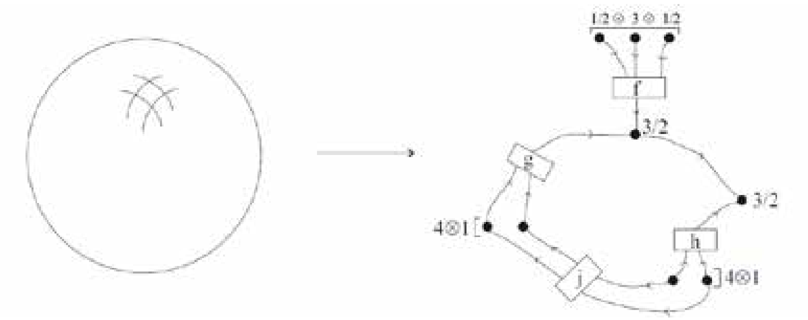


图 5　Tannaka 对偶将群 SU（2）≅S^3转化为其表示（Rep）的离散化了的范畴，Rep（G）（图片来自文献[18]）

每一个表示都完全可约为自旋 $j/2$ 不可约表示的直和。态射 f,g,h,j 表示了互相缠绕交织（Intertwining）的映射。值得注意的是，这两张图形包含了相同的信息（即具有对偶性）。

这也说明了不同物理理论之间有某种隐藏的对偶性，好似一种看不见的魔力使得看起来完全不同的物理对象的背后有共同的数学结构把它们神秘地联系了起来。对偶性甚至在更广泛的意义上跟范畴学发生了关联，这从图 5 可以一窥其妙。

关于数学上与范畴描述相关的对偶性问题这里不详细阐述了，将来在另外的文章里做进一步的介绍。

实际上，在凝聚态物理学中将自旋或玻色子映射为费米子的模型有很长的历史。在（1+1）维情况下，这样的映射基于 Jordan-Wigner 的变换，它引入了非局域弦算符来确保任意空间分离处对象之间的统计变化。尽管存在这种非局部性，但许多局部（1+1）维度的自旋或玻色子模型能精确地映射到局部费米子。例如，一维（1D）横向场 Ising 模型就被映射为在相变处变成无质量的自由 Majorana 费米子链。又比如附加了 Chern-Simons 通量后，同样的处理方法可以推广到二维（2D）系统；此时“统计”意味

的规范场扮演了与 1D 情况下 Jordan Wigner 弦相同的角色。这方面的一个应用是将电子分数量子霍尔态描述为 Chern-Simons 玻色子的超流体。

因此，可以这么说，对偶性提供了对原初问题的某种替代性重新表述，这一互补性的表述可以通过统计嬗变而获得。经典的例子包括了上述的 Ising 自旋的 Kramers-Wannier 对偶和玻色子的粒子-涡旋对偶。

人们还发现了一种费米子对应物，可以把自由 2D 的狄拉克费米子映射与规范场耦合的对偶的狄拉克费米子。在上述这些情况下，就原始微观自由度而言，对偶性的准粒子都是高度非局域的物体，但表现出了相同的统计特性。

在[19]中，费米子自旋被解释为玻色子和涡旋的相对取向。在费米子时间反转下，自旋翻转，对应于取代玻色子↔ 旋涡，即对偶性。图 6 是其示意图，具体和精确的内容与意义这里不再细说，读者可以参看原始文献。

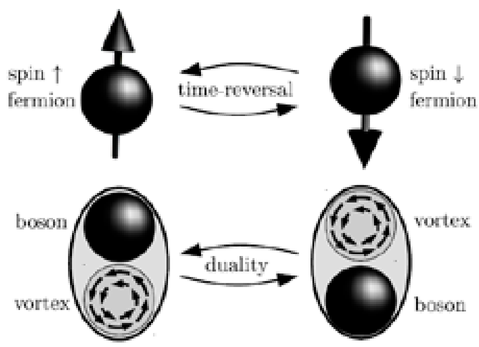
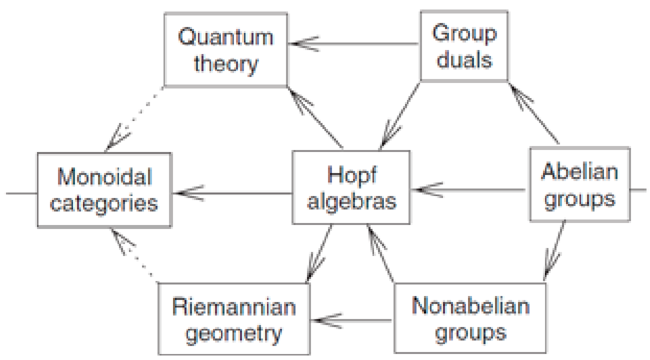


图 6　费米子自旋被解释为玻色子和旋涡的相对取向。在费米子时间反转下，自旋翻转，对应于玻色子与涡旋的相互取代，即粒子（此处指玻色子）−涡旋对偶性（图片来自文献[19]）

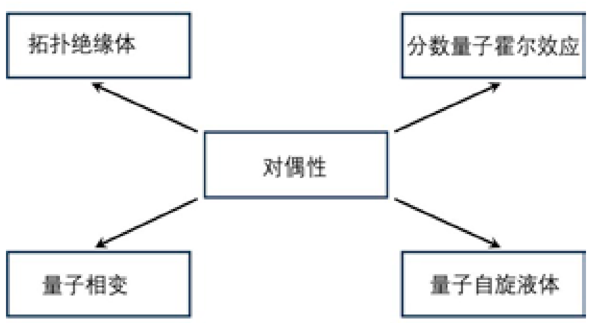
另外，[19]的作者详细阐述了对称性和对偶性的联系：对称性的存在可以为既适用于对偶性又适用于统计嬗变的系统产生有趣的结果。由于不同表示之间的非局部关系的原因，作用于一组变量的局部对称性在另一组变量中的作用可以是非比寻常的。例如，在 1D 中，自由 Majorana 链中的平移对称性实现了 Ising 模型的对偶性，使得模型又嬗变回有自旋的情况下。Seiberg、Senthil、Wang 和 Witten 以及 Karch 和 Tong 等都将这种对称与对偶的对应关系扩展到了 2D 系统。他们还确定了当用玻色子耦合到 Chern-Simons 场的情况下，能建立与时间反转对称性相关的自由 2D 狄拉克费米子与粒子-涡旋对偶性相关的联系，见图 6。类似地，微观玻色子的时间反转对称性对应于具有 Chern-Simons 耦合的狄拉克费米子的粒子-涡旋对偶性。如果把这种对应性也理解为一种广义的对偶性，那么上述图像凸显了对偶性的层级性质，好比数学概念范畴中的对象如果也是一个范畴，那么新构造出的关于“对象为范畴”的范畴就是 2-（级）范畴，甚至可以有 n-范畴。类似地，我们可以有 2-对偶（图 6）和更高级的 n-对偶。事实上，也有很多相互之间有不同关系与联系的对偶性的网（Web of Duality），两个典型的例子分别来自于数学和凝聚态物理领域，见图 7。

文小刚在他的《多体系统的量子场论》一书[20]的 6.3.1 节专门讨论了 U(1)规范理论与 1+2 维（时空）的 XY 模型之间的对偶性问题：U(1)规范理论中量子化了的电荷就是 XY 模型中量子化了的涡旋，此即后来被大量研究且仍在被深入研究中的粒子-涡旋对偶性（Particle-vortex Duality）的简单一例。

进一步的推论是考虑了各自的瞬子及其效应。具体来说是 U(1)规范理论中的瞬子给出了规范玻色子一个有限大小的能隙并产生 U(1)电荷粒子间的禁闭效应；而在对偶的 XY 模型中，瞬子联系着其激子波函数的相位θ（低能慢涨落），并由模型中的势能项 cos(θ)所刻画。因此带瞬子的 U(1)规范理论与带势能项的 XY 模型对偶，这是附加了新物理结构的扩展了的对偶性。



（图片来自文献[9]）



（图片来自网络）

图 7　Hopf 代数的对偶网（上图）和凝聚态物理中的对偶网（下图）

按照以上的逻辑和思路，人们可以拓展和扩张更多的对偶性，例如文小刚在他的书[20]里还专门讨论了 U(1)规范场与他创立的弦网（String-net）之间的对偶性问题。

近年来，凝聚态物理中关于运用高阶范畴理论，并结合由高阶群描述的对偶对称性来研究拓扑相变中的高阶范畴对称性及其对称破缺下的不可逆反常等变得非常活跃。例如在文小刚 2020 的文章[21]中，针对 n 维空间中完全破坏了有限对称性 G 的零温度 Landau 对称性破缺跃迁问题（该跃迁的临界点具有

对称性 G），他们证明了临界点也具有对偶对称性——当 G 是阿贝尔群时，由更高阶群来描述的（n−1）对称性，或者当 G 是非阿贝尔群时，则具有更高阶的代数（n−1）对称性。事实上，任何 G 对称系统可以看作是 G 规范理论在一个更高维度上的边界。体 G 规范理论中的规范电荷守恒和规范通量守恒分别产生了通常的对称性和对偶对称性。所以任何 G 对称系统实际上都有一个更大的对称性，称为范畴对称，它是对称性和对偶对称性的结合。然而，范畴对称的一部分（也是唯一的一部分）必须是在系统的任何带隙阶段都是自发破缺的，但存在一个无隙状态，其中范畴对称性不是自发破缺的。这种无能隙状态对应于对称破缺相变的通常的朗道临界点。即使将对称性的概念扩展到包括更高对称性和代数更高对称度，上述结果仍然有效。因此，他们断言其研究结果也适用于物质拓扑相变下的临界点。特别地，他们还证明了从 3+1 维 Z_2 规范理论到平凡相的转变可以有几个临界点。希格斯粒子凝聚的临界点具有 Z_2 的 0-对称性和对偶 Z_2 的 2-对称性所形成的范畴对称性，而禁闭相变的临界点则具有 Z_2 的 1-对称性和对偶下的另一个 Z_2 的 1-对称性所形成的范畴对称性。

图 8 是 1+1 维的 Ising 模型的 Z_2 对称性和对偶的$\tilde{Z}_2$对称性的演示。显然在 H^{Is} 的描述中 Z_2 对称性是明确的，而对偶的$\tilde{Z}_2$对称性却在 H^{DW}（DW 是畴壁 domain wall）描述中是明确的。Ising 模型具有双重的 Z_2 对称性和$\tilde{Z}_2$对偶对称性。基态通常自发地破缺掉其中一个对称性，除了在 $B=J$ 的临界点处，其中对称性和对偶对称性（即全 $Z_2 \vee \tilde{Z}_2$ 范畴对称）不会发生自发破缺。

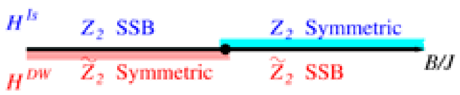


图 8　相同的 Ising 模型可以用 H^{Is} 或 H^{DW} 来描述（图片来自文献[21]）

5. 总结

总之，对偶性理论在现代数学和物理中扮演着越来越重要的角色，其优势不仅是技术性的，例如把很难处理的强耦合或者非微扰问题，在对偶性的框架下变成容易处理的弱耦合或者微扰的问题，但更重要的是，她本身还具有一般的原理性的法则和潜在的理论价值。她不仅是理论之间的简单的变换、补充或者投影，她更像是一个有整体性结构的有魔力的生命体，能够有充分的发展自由度。我们期待她能有更好的成长和持久旺盛的生命力，并将在未来成为数学和物理乃至其他更多科学领域中最有影响力且引人入胜的坚实而又理性的知识与智慧之网。

参考文献

[1] 谢柏松. 数学和物理系统中的对偶性漫谈. 系统和控制纵横, 2018, 5: 82 – 92.

[2] 谢柏松. 数学和物理系统中的对偶性漫谈（二）. 系统和控制纵横, 2018, 5: 53 – 63.

[3] 谢柏松. 数学和物理系统中的对偶性漫谈（三）. 系统和控制纵横, 2022, 9: 34 – 46.

[4] David I Olive, Exact Electromagnetic Duality, arXiv: hep–th/9508089, 1995.

[5] Gaetano Bertoldi, Potts model: Duality, Uniformization and the Seiberg–Witten modulus, arXiv: cond–mat/9911383, 1999.

[6] Seiberg N and Witter E. Nucl. Phys. B426 (1994) 19; Nucl. Phys. B431 (1994)，484.

[7] Fendley P and Saleur H. Self–Duality in Quantum Impurity Problems. Phys. Rev. Lett. 81 (1998)，2518.

[8] Kramers H A, Wannier G H. Phys. Rev. 60 (1941)，252.

[9] Francoise J, Naber G L, Tsun T S. Encyclopedia of Mathematical Physics. Elsevier Inc., 2007.

[10] Dirac P. Quantised singularities in the electromagnetic field, Proc Roy Soc A33 (31) 60–72

[11] Montonen C and Oliver D. Phys Lett 72B (77) 117–120, “Magnetic monopoles as gauge particles?”

[12] 李淼. 超弦史话. 北京大学出版社, 北京, 2005.

[13] Seiberg N. Electric – magnetic duality in supersymmetric nonAbelian gauge theories, Nucl. Phys. B 435, 129 (1995). [hep–th/9411149].

[14] Seiberg N and Witen E. Nucl Phys B426 (94), 1952, Erratum B430 (94), 485 – 486, “Electromagnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang–Mills theory”.

[15] Sergei V Ketov. Solitons, Monopoles, and Duality : from Sine–Gordon to Seiberg–Witten，arXiv: hep–th/9611209.

[16] Kramers H A, Wannier G H. Phys. Rev. 60 (1941), 252.

[17] R. B. Potts, Proc. Cambridge Philos. Soc. 48 (1952), 106.

[18] Bartlett B. Categorical Aspects of Topological Quantum Field Theories, Master Thesis, Utrecht University, (Netherlands), 2005.

[19] David F Mross, Jason Alicea, and Olexei I Motrunich, Symmetry and duality in bosonization of two–dimensional Dirac fermions, arXiv: cond–mat/1705.01106.

[20] 文小刚. 多体系统的量子场论（从声子的起源到光子和电子的起源）. 世界图书出版公司北京公司，北京，2012.

[21] Ji Wenjie and Wen Xiao–Gang. Categorical symmetry and noninvertible anomaly in symmetry–breaking and topological phase transitions, Phys. Rev. Research 2, 033417 (2020).

【作者简介】谢柏松，1965 年生，男，汉族，安徽桐城人，理论物理博士。现为北京师范大学物理与天文学院教授、博导，研究方向为等离子体物理和强场量子电动力学等，已发表 SCI 论文 170 多篇。业余爱好诗歌、科学哲学与周易等。