

应县木塔的静力学分析

张伟伟 东莞理工学院 机械工程学院

应县木塔位于山西省北部，朔州应县佛宫寺内，全称“佛宫寺释迦塔”，是我国如今唯一保存完好的木构塔式建筑。据明万历年间田蕙（字应芳，号绎斋，今山西应县人，1535–1610）编撰的《应州志》记载，应县木塔于辽代清宁二年（1056，北宋至和三年）由田和尚奉敕募建，至金代明昌六年（1195）增修益完^[1]。本文尝试从静力学角度浅析应县木塔的结构特点，并阐述木塔在结构上所满足的力学原理。

1、应县木塔外观与力学

图 1 所示为应县木塔的整体和局部图，塔身自下而上共分为四个部分：第一部分是砖石阶基，高 4.40m；第二部分是木塔塔身，高 51.14m；第三是砖刹座，高 1.86m；第四是塔尖铁制塔刹，高 9.91m。全塔总高度 67.31m，大约相当于今天的 21–24 层楼的高度（按楼层高 2.8m–3.2m 计算）。全塔大木结构仅用榫卯连接，斗拱错落有致，极具美学价值和科学研究价值。

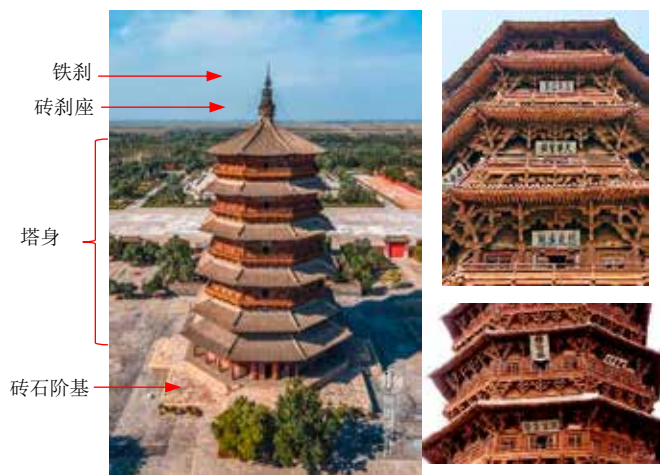


图 1 应县木塔整体及局部图（来源：网络）

世界高层建筑委员会（属联合国教科文组织）曾建议将高层建筑分为四类^[2]，I类为9-16层，高度不超过50m；II类为17-25层，高度不超过75m；III类为26-40层，高度不超过100m；IV类为40层以上，高度在100m以上。在这一标准中，应县木塔可归类为II类高层建筑。960多年前修建当今的II类高层建筑，其设计和施工难度可见一斑。

相比低层建筑，高层建筑高度跨度大，随着高度的增加，侧向载荷（如横向风载）将快速增加，如图2(a)所示。由此引起的结构内部水平位移和内力，也将随高度发生不同的变化。如图2(b)所示，高层建筑内竖向轴力随高度按照线性规律增加，弯矩则按照二次规律增加，水平位移则以四次规律增加。这是在高层建筑设计 and 施工中必须要考虑的因素。

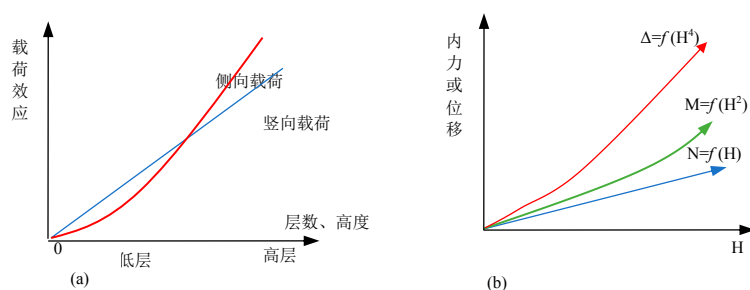


图2 高层建筑随高度增加载荷、内力、水平位移的变化趋势

当代高层建筑采用深基坑技术来克服横向载荷，对于地质条件较差的地区还需要打桩，相当于增加了建筑的埋深。一般情况下，要求桩基深度不小于建筑总高度的1/18，桩基所受的约束就像固定端，因此，在力学上，常将高层建筑简化为竖立的“悬臂梁”，如图3所示。其中， Δ 表示水平位移， M 表示高层建筑截面弯矩， F_s 表示截面上的剪力， N 表示高层建筑截面轴力。

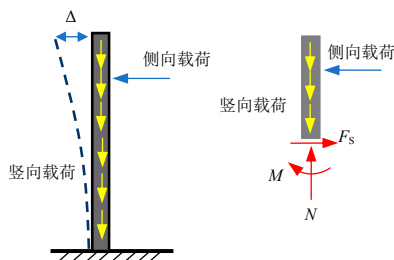


图3 高层建筑的“竖悬臂梁”模型

为简化分析，假定侧向风载为均布载荷（实际上，风载随高度变化，且具有随机性），写出位移 Δ 、弯矩 M 、剪力 F_s 、轴力 N 随楼层高度 x 的方程为：

$$\Delta = \frac{qx^2}{24EI} (x^2 - 4Hx + 6H^2) \quad (1)$$

$$M = \frac{1}{2}q(H-x)^2 \quad (2)$$

$$F_s = q(H-x) \quad (3)$$

$$N = \rho g(H-x) \quad (4)$$

依据上述方程，画出高层建筑的变形曲线、轴力图/剪力图、弯矩图，如图 4 所示。依据内力图可知，高层建筑适合采用自下而上截面逐步收缩的变截面造型，可达到依次增强低层区承载能力的目的。应县木塔就采用了这样逐步内缩的整体造型，连接 2 层以上各层外檐柱柱头，它们大致落在同一条直线上，由此大致可推测出应县木塔的内缩角度大约在 8° 左右，如图 5(a)所示。

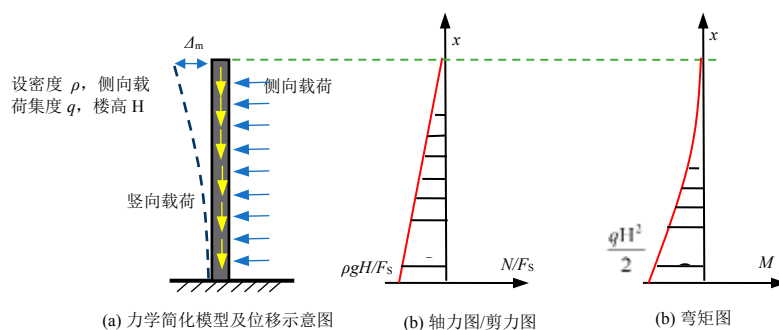


图 4 高层建筑的內力和位移分析

不过，应县木塔的地基不像现代建筑那样，利用基坑把建筑深深“埋”入地下，而是“放”在基座之上。“埋”入地下的做法相当于固定端，可为高层建筑提供足够抗倾覆力矩，以确保建筑的稳定性。那么，应县木塔如何提供建筑的抗倾覆力矩呢？这主要涉及三个方面：

向上逐步收缩的变截面保证了木塔的中心尽可能在中线上，横向载荷产生的倾覆力矩在各方向相同，所需的抗倾覆力矩在各方向也相同；

应县木塔第一层直径较上面各层直径有明显的增加，对于等截面的建筑(参见图 5(b))，在横向载荷下，抗倾覆力矩较小 (d 很小)；但如果增大第一层面积(参见图 5(c))，一方面它降低了建筑整体的重心，另一方面使得地面支撑向外移动，这就大大增加了建筑的抗倾覆能力；

古建筑的屋顶通常都很重，增加了建筑物的重量 G ，也增加了抗倾覆能力。

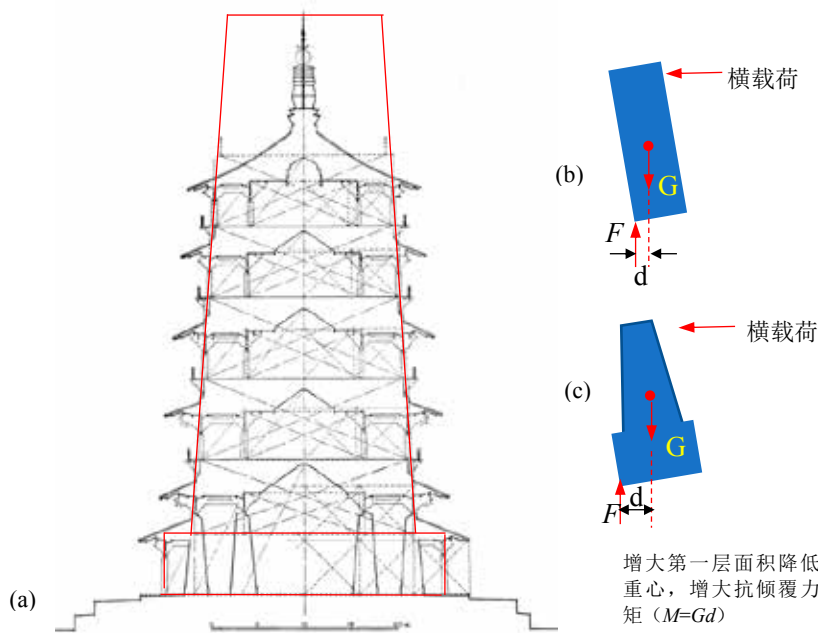


图5 自下而上逐渐内缩的造型

应县木塔正是利用上述三点增加了抗倾覆力矩，由于这种“放”在基座上的建筑保留了一定的自由度，在遇到如地震等强载荷时，建筑可以产生一定范围内的“移动”，从而消耗强大的能量输入。根据史料统计^[3]，应县木塔建成至今，共经历了 40 余次地震，200 余次炮击，却安然无恙，不由得令人为之惊叹称奇！

2、应县木塔与筒中筒结构

在我国的《高层建筑混凝土结构技术规程》中，高层建筑被分为 A 级和 B 级两类，这种划分没有明确指明楼高，而是将其与结构形式、抗震设防烈度相关联。表 1 给出了几类典型结构体系对应抗震设防烈度下的最高楼层高度，从中可以看出，筒中筒结构在相同抗震设防等级下，能取得的高度最高。应县木塔就采用了这样的筒中筒结构体系。

表 1 A 级钢筋混凝土高层建筑的适用高度^[2]

结构体系	非抗震设计	抗震设防烈度				
		6 度	7 度	8 度	9 度	
框架	70	60	55	45	25	
框架-剪力墙	140	130	120	100	50	
剪力墙	全部落地	150	140	120	100	60
	部分框架	130	120	100	80	不应采用

续表

筒体	框架-核心筒	160	150	130	100	70
	筒中筒	200	180	150	120	80
板柱-剪力墙		70	40	35	30	不应采用

顾名思义，筒中筒结构体系由内筒和外筒两层组成，如图6所示。常见的外筒形式包括钢框架筒（框架结构）、桁架筒（有明显的节）和网格筒（外筒看不到节，但内部与内筒以节相连）三种，内筒有桁架筒和剪力墙筒体两种形式。

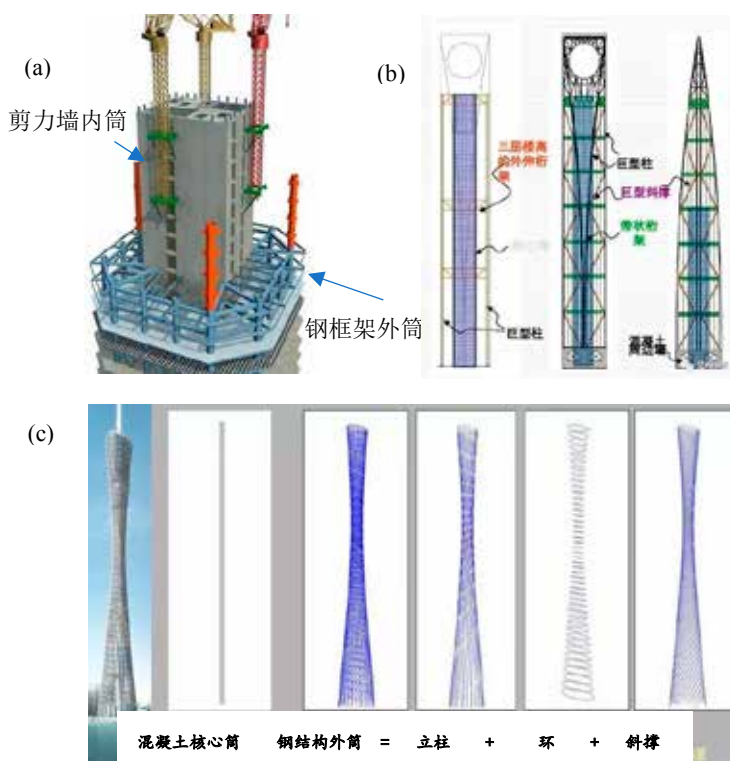


图6 筒中筒体系举例(来源:网络)

筒中筒体系的设计灵感很可能来源于竹^[4]。竹有两个明显特征：有节、腹空。正是这两个特征才使得竹可以高耸挺拔，直入云霄。依旧采用“悬臂梁”模型，分析竹在强度、刚度两方面的特点。从强度条件看，高耸的竹子侧向载荷显著，强度主要考虑弯曲应力，最大弯曲应力的求解公式为

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \quad (4)$$

其中， W 为抗弯截面系数，由上式可知该系数越大，求得最大应力越小，结构的安全储备就越多，结

构越安全。当外载荷确定后,梁所受最大弯矩 M_{max} 即为常数,其强度取决于抗弯截面系数。以下举例说明“腹空”结构在结构强度、刚度和用材上的合理性。

设有圆形空心梁和实心梁,空心梁外径为 $D_{空}$,内外径之比 α 固定为 0.9;实心梁外径为 $D_{实}$ 。先假定两种梁的抗弯截面系数相同,即 $W_{实} = W_{空}$,利用抗弯截面系数公式可得^[5]

$$\frac{\pi D_{实}^3}{32} = \frac{\pi D_{空}^3 (1-0.9^4)}{32} \quad (5)$$

依据上式导出实心梁与空心梁直径之比,即可求出两者的面积之比为:

$$\frac{S_{实}}{S_{空}} = \frac{\pi D_{实}^2}{\pi D_{空}^2 (1-\alpha^2)} = \frac{0.7^2}{1-0.9^2} \approx 2.58 \quad (6)$$

这意味着,在相同强度条件下,空心结构的用材几乎只有实心结构的 38% (即 1/2.58)。同理,再假定两种结构的横截面面积相等 (设高度相等),有

$$\pi D_{实}^2 = \pi D_{空}^2 (1-\alpha^2) \quad (7)$$

求出空心与实心梁直径之比,可得抗弯截面系数之比为

$$\frac{W_{实}}{W_{空}} = \frac{D_{实}^3}{D_{空}^3 (1-0.9^4)} \approx 0.24 \quad (8)$$

这说明在同等用材下,实心梁的抗弯截面系数约为空心梁的 24%。可见,合理设计“腹空”结构,可在减少重量的同时提高结构的抗弯截面系数。

再来考虑刚度条件,依然假定建筑受均匀横向载荷,悬臂梁的最大挠度为^[5]:

$$\Delta_{max} = \frac{qH^4}{8EI} \quad (9)$$

由于楼高、载荷、材料等参数确定,即式(9)中 q, H, E 均为常数,因此与截面惯性矩 I 就成为影响最大挠度的关键变量。在材料力学中, EI 被称为抗弯刚度。显然,抗弯刚度越大,产生的位移越小。仿照前面分析,同样可得,当结构取得相同抗弯刚度时,即 $EI_{实} = EI_{空}$,代入截面惯性矩公式可得^[5]

$$\frac{\pi D_{实}^4}{64} = \frac{\pi D_{空}^4 (1-0.9^4)}{64} \quad (10)$$

求出实心梁与空心梁直径之比，可导出两者截面积之比为

$$\frac{S_{\text{实}}}{S_{\text{空}}} = \frac{\pi D_{\text{实}}^2}{\pi D_{\text{空}}^2 (1 - \alpha^2)} = \frac{0.766^2}{1 - 0.9^2} \approx 3 \quad (11)$$

也就是说考虑同等刚度条件时，空心结构用材约为实心结构用材的 1/3。如果空心梁和实心梁横截面相同，即满足式(7)，利用导出的直径之比可求出抗弯刚度之比为

$$\frac{EI_{\text{实}}}{EI_{\text{空}}} = \frac{D_{\text{实}}^4}{D_{\text{空}}^4 (1 - 0.9^4)} = \frac{0.436^4}{(1 - 0.9^4)} \approx 0.105 \quad (12)$$

这意味着当空心梁与实心梁横截面积相等时，实心梁的抗弯刚度，大约只有空心抗弯刚度的 10%，也意味着实心梁的最大挠度将是空心梁最大挠度的 10 倍。

由此可见，竹的“腹空”结构可极大提高强度储备和刚度，增加高耸结构的稳定性。筒中筒结构体系相当于两个筒体耦合在一起，内筒与外筒之间形成的回廊又增加了建筑空间，提高了适用性。图 7 所示为应县木塔的结构体系，显然它和现代高层建筑的筒中筒结构十分类似。从一层结构来看，其内筒和外筒均采用了“柱框架+剪力墙”的结构，这就像是框架结构过渡到剪力墙结构。从结构强度的角度来看，剪力墙可增强高层建筑的竖向承载能力和横向承载能力。

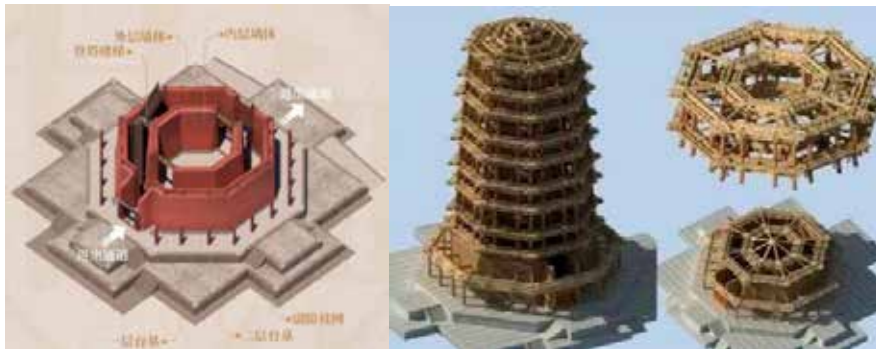


图 7 应县木塔的筒中筒结构 (来源: 网络)

据说梁思成 1933 年第一次测绘应县木塔时，木塔二层以上都有夹泥墙（做剪力墙使用），但在随后的一次修缮中，因相关专家认为剪力墙使得木塔看起来不够“玲珑剔透”，因此将二层以上的夹泥墙拆除，全部换成木格。等到梁思成再次关注到应县木塔时，心痛的说“现在不惟壁画失亡，且因改换格子门，拆去斜戗，危及塔身结构，比民国十九年战争中弹时损害尤烈，可谓为木塔八百余年以来最大的厄运。”^[6] 如今，木塔二层已有明显的残损和倾斜变形，成为木塔修缮加固的重点和难点^[7]。

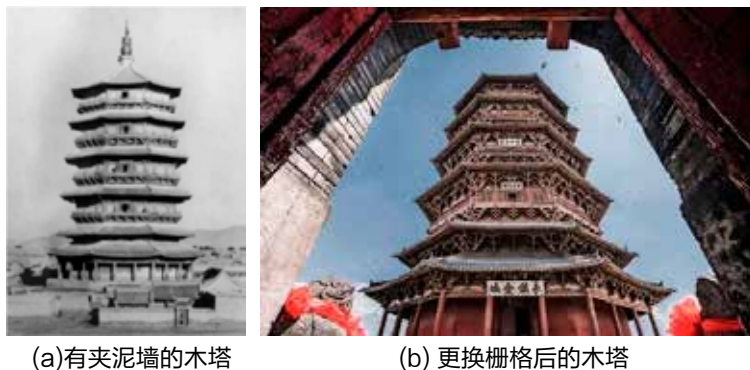


图 8 有无夹泥墙的应县木塔对比 (来源: 网络)

3、应县木塔与叠垒结构

工程结构在力学上除了分析强度刚度之外,对于受压杆件(柱)还需要考虑失稳问题。由于高层建筑受力与“受压杆件”类似,其竖向压力载荷巨大,因此“压杆失稳”也是高层建筑必须考虑的。依据欧拉公式,求解压杆失稳的临界载荷为^[5]

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \tag{13}$$

这里, l 相当于楼的高度, μ 称为长度因数,与约束有关。由上述公式可以看出,当楼层越高,即 l 越长,其临界载荷越小,就越容易发生失稳。不过,我们也应该注意到高层建筑竖向载荷的变化。由于高层建筑的竖向载荷主要来自于建筑的自重,因此,竖向载荷自上而下逐渐增加,越是下层受到的压力越大。

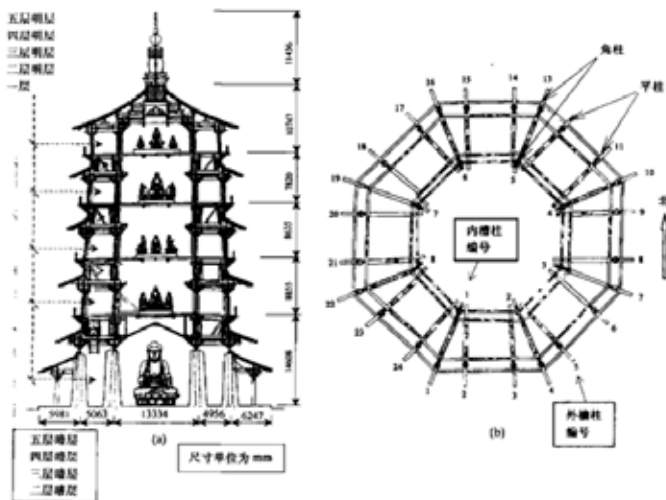


图 9 应县木塔框架示意图 (来源: 网络)



图 10 应县木塔暗层示意图 (来源: 网络)

楼层很像竹子柱节的作用，竹节给“压杆”增加了约束，将长长的竹子划分为多个小段，每一段都是一个两端固定的压杆 ($\mu=0.5$)，减小了欧拉公式中的 l ，使得每一段都是“短杆”而不是长杆，从而保证了在竖向载荷下的稳定性。竹节总是下面的短、上面的长，这体现了竹子在抵抗压杆失稳时的“聪明才智”。由于下面的载荷大，短一些可提高失稳临界载荷，上面载荷小一些，可适当增加长度，从而保证自身能够长得最高。高层建筑也是这样，低层区应该矮一些，高层区可以高一些。有的时候，一层需要某种使用功能，需要高开间，那么一层的柱或墙就需要做的粗壮、厚实一些（加大截面惯性矩）。如图 9 所示，应县木塔第一层开间大，柱径也明显大于其他层的立柱，增加柱径除了具有增大承载能力，也是确保立柱不发生“压杆失稳”的重要保证。

此外，应县木塔塔身表面上看是 5 层，但实际上有 9 层，被称为 5 明层，4 暗层（参见图 10）。暗层的作用就像是竹子的“节”，它利用斜撑增加了暗层的刚度，使木塔整体表现出一刚一柔、刚柔并济的特点。从压杆失稳的角度看，缩短了承压柱的长度，提高了承压柱的临界载荷。大概也因为此，有学者认为应县木塔不是简单的筒中筒结构，而应该是单层建筑的“叠垒”结构^[8]。

从力学分析角度看，分析“承压稳定性”（类似于压杆失稳），就需要将其视为“叠垒”结构模型，但是如果分析强度和刚度，则需要用筒中筒结构模型。根据分析目的不同，变换力学模型，选取不同的研究对象，也是力学分析的基本特征。

致谢：作者感谢天津大学王振东教授和太原科技大学刘利亭老师在完成本文过程中的帮助和指导！

参考文献

- [1] 陈明达. 应县木塔. 文物出版社, 1980.
- [2] 彭伟. 高层建筑结构设计原理. 第2版[M]. 西南交通大学出版社, 2010.
- [3] 公众号“星球研究所”. 中国第一木塔, 为何屹立1000年不倒? 2018.06.18.
- [4] 孙宁, 张立彬等. 竹子的力学特性[J]. 力学与实践, 1997, 19(3).
- [5] 常红, 赵子龙. 材料力学. 2版[M]. 科学出版社, 2015.
- [6] 吴艳. 营造学社发现与考察的那些佛教建筑. 中国民族报. 2020.3.17.
- [7] 杨娜, 郭丽敏, 永昕群, 秦术杰. 应县木塔结构问题研究现状综述[J]. 古建园林技术, 2021, (02): 69-74+85.
- [8] 张星云. 漫长的讨论: 重新应县木塔的权利. 三联生活周刊, 2020, 46: 100-106



【作者简介】张王伟, 1978年2月出生, 博士, 教授。现为东莞理工学院机械工程学院力学教师, 主要研究方向为结构损伤检测、力学史与方法论。在研国家自然科学基金和山西省自然科学基金各1项。曾获山西省“三晋英才”荣誉称号, 山西省青年教师讲课比赛三等奖, 山西省教学成果一等奖, 指导学生参加山西省“兴晋挑战杯”大学生课外学术科技作品竞赛获二等奖, 获太原科技大学“2013—2014年度优秀青年教师”等奖励。发表学术论文50篇, SCI/EI收录24篇。