

浅谈分布式优化模型及其应用

张艳琼 杭州电子科技大学自动化学院

1 引言

大自然是人类最好的老师，人们总是能从许多的自然现象中获得灵感和启发。如图 1 所示，鱼群随着季节的变化迁徙时，它们能在迁徙过程中有规律地避开途中的障碍物；雁群在南飞的过程中，能够保持飞行高度和速度的一致，并且还能形成整齐的队列；蚂蚁在搬运粮食的过程中能和同类进行协作分工，高效地完成目标，10 多只团结一致的蚂蚁，能够搬走超过它们自身体重 5000 倍的食物。很早以前人们就观察到自然界中的鱼群、鸟群、蚁群等通过简单的局部交流及合作来觅食和抵御侵略，进而产生比单个个体的行为更为有效和复杂的群体行为，并且能够实现单个个体所不能实现的目标。受到这些自然现象的启发，越来越多的学者们开始投入到群体行为的研究中，并试图将群体行为背后的思想应用于民用和国防领域中那些无法用单个个体解决的实际问题，例如：森林火灾控制、机器人搜救、传感器定位、区域的监控与侦查、水下探测、宇宙探索等。近三十年来，随着现代科学技术的深入发展，科技界涌现出很多关于群体行为的建模和仿真研究，进而推动了多智能体系统的研究与发展，吸引了越来越多来自生物、物理、计算机、工程、社会科学等众多学科研究人员的关注。

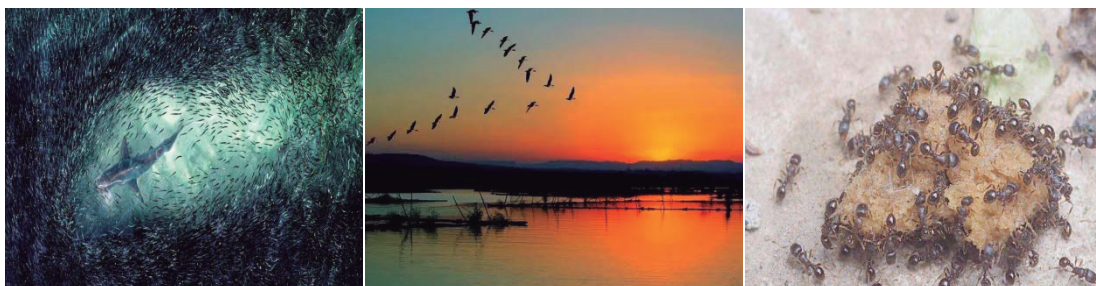
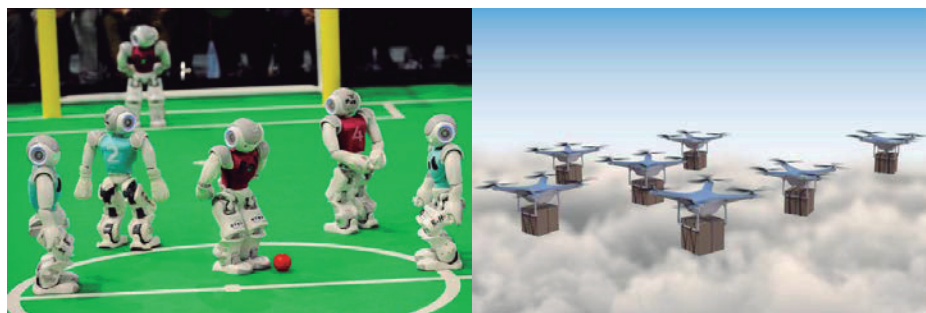


图 1 自然界中的群体行为 (图片源自百度)

多智能体系统通常是指由一群具有相互作用、相互影响的个体组成,且每个个体具有一定的感知、计算、通信、机动、决策和执行能力。这些个体可以是人、机器人、计算机程序、飞行器、生命组织和经济实体等。近年来,由于计算、通信、传感器、微电子等技术的快速发展,使用由机器人、飞行器、水下车辆、移动机械臂、自动引导小车 (AGV)、服务器等构成的多智能体系统 (如图 2 所示) 来解决复杂的大规模实际问题变得可行,从而促使多智能体系统的分析、控制与优化成为当前热门的研究领域。在多智能体系统中,每个个体通过传感器或通信模块来获取自己邻居的信息,然后基于这些局部信息来决策自己的行为。相比传统的控制系统,多智能体控制系统没有类似中央处理器的部件来负责采集所有个体的信息并进行集中的计算、分析和综合,它能有效地应对由网络规模的扩展给海量信息的传输、通信、存储、计算带来的巨大挑战,同时还具有以下几个显著的优点: (1) 高效性,多智能体系统的任务往往可以分解为多个子任务,而这些子任务可由系统中的个体 (子系统) 分别来完成,这样的分解方式提高了任务完成的速度进而提高任务求解的效率; (2) 鲁棒性,传统的控制系统中,如果某一子系统不能正常工作,可能会导致整个系统崩溃而不能完成整体任务,但在多智能体系统中,由于任务被分解为多个子任务,所以即使某一子系统不能工作,整体任务仍有可能完成,或即使不能完成,其损坏造成的影响也不至于太大; (3) 可移植性,多智能体系统中的个体往往具有模块化功能,具有自主的计算、执行和决策等能力,这使其具有很灵活的可移植性。



(a)

(b)

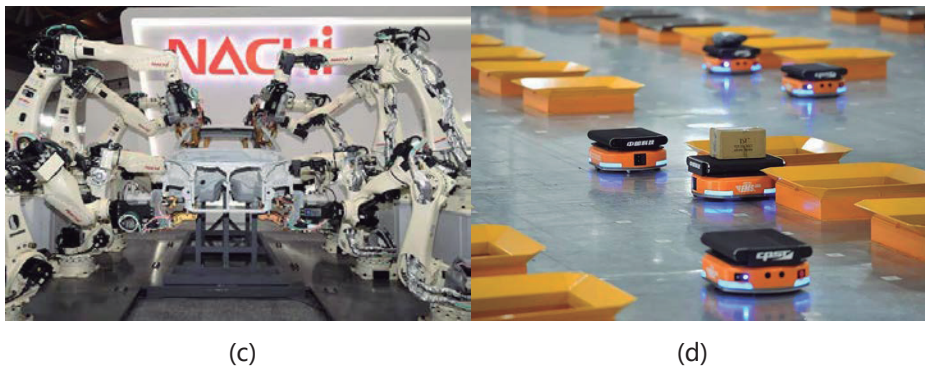


图2 多智能体系统: (a) 机器人足球; (b) 无人机编队; (c) 机器臂协同制造; (d) AGV 智能分拣
(图片源自百度)

优化与博弈是运筹学与控制论理论研究中的核心问题之一,同时还在包括系统科学、人工智能、生物学、生态学、压缩感知、生产制造、无线通信等很多领域有着广泛的应用。但是随着现代科学技术的深入发展,在生物、物理、社会 and 工程等众多学科中出现了许多传统的集中式优化算法无法解决的新问题,这些问题的数据规模庞大,集中式算法因受限于单机的计算瓶颈而难以应对。另外,通信和微电子技术的迅猛发展,极大地增加了传感器、处理器及各种执行器件的传输、存储、通信和计算能力,进一步拓展了各类分布式算法的应用范围,促使分布式优化理论研究不断取得新的成果。尤其是随着多智能体系统理论和协调控制技术的发展,许多分布式优化算法可以通过借助多智能体网络的方式来实现。随着信息融合物理系统、智能电网、移动机器人网络等一些大规模复杂网络的兴起与发展,给海量信息的传输、通信、存储、计算带来巨大的挑战。对于处理大规模复杂系统的优化问题,分布式方法比传统集中式方法更为灵活,操作起来也更为方便,这使得分布式优化的研究得到了迅速发展,并逐渐渗透到科学研究、工程应用和社会生活的各个方面,被广泛应用于无线通信、智能电网、传感器网络、智能制造、智能楼宇、社会网络、车联网等实际应用领域。例如,在无线通信的小基站网络能效优化问题中,小基站需通过合作来有效配置信道资源、制定功率分配策略及选择合理的移动中继,并且在保证终端用户通信质量的前提下最大化通信网络的数据传输速率。在电力网络的经济调度问题中,母线节点需要合作决定各个节点的有功发电,在安全性约束得到满足的条件下以最低成本实现功率负载平衡。在传感器网络中,个体需通过局部量测数据和局部状态信息交互合作,实现对未知参数的估计或对未知目标的定位。在覆盖问题中,各监控设备需通过合作优化某任务指标以决策其空间分布,从而实现了对区域环境的监测覆盖。

分布式优化理论和应用研究已经成为当代系统控制、运筹决策和网络科学的重要发展方向之一,在算法设计过程中它有效地结合了这三个不同研究领域的关键技术特征,属于多学科的交叉研究方向,其相关理论的研究必将促使这三个领域的相互交融和交叉发展,具有重要的理论和现实意义。在分布式优化理论研究过程中,优化算法的提出、收敛性的证明、复杂性(包括分析复杂性和算术复杂性)的分析是其中几个关键性的研究问题。近年来,关于分布式优化的研究发展非常迅速,并取得了一系列显

著成果，感兴趣的读者可参阅综述类文献[1-6]。现有的分布式优化算法大体可以从以下几个不同的视角进行分类：(i) 从优化问题本身的受限条件而言，可以分为分布式无约束优化和分布式约束优化两大类；

(ii) 从优化算法更新执行的方式，可以分为离散时间和连续时间分布式优化算法两大类；(iii) 从优化算法执行载体（多智能体系统）的自身动力学特性，可以分为一阶和高阶多智能体系统的分布式优化算法两类；(iv) 根据优化问题发生环境的不同（代价函数是否动态变化），可以分为离线和在线分布式优化算法两大类。当然除此之外分布式优化算法还有其他的一些分类标准，比如确定性和随机分布式优化算法，光滑和非光滑优化算法，原始域算法、对偶域算法和原始-对偶算法，等等。

在本文中我们主要集中讨论，分布式优化的三类重要问题：1) 无约束分布式优化；2) 分布式约束优化；3) 高阶多智能体系统的分布式优化。分布式优化所涉及的研究领域较广，文中我们将结合实际应用中的实例针对上述的三类优化问题的模型及算法进行简要介绍，希望抛砖引玉、引起读者对分布式优化的研究兴趣。

2 无约束分布式优化

作为优化理论中最基本的问题，无约束优化是分布式优化研究的出发点，早在 20 世纪 80 年代就由美国工程院院士 John N. Tsitsiklis 提出，但直到最近十多年才得到蓬勃的发展和广泛的关注。尤其是随着网络科学和网络工程技术的兴起，无约束分布式优化在图像重构中的原像恢复、机器学习中的分布式参数估计和传感器网络中的目标定位等实际问题中有大量的应用。除此之外，无约束分布式优化问题还可以涵盖一些带约束的网络优化决策问题，比如通过惩罚函数法将一些带约束的分布式优化问题转化为无约束优化的形式来求解。

下面我们先通过机器学习中的一个支持向量机（SVM）的实例来简单介绍一下无约束分布式优化的主要思想以及模型。

例 1 考虑一个包含两种不同类型样本点的数据集 $D = \{z_j, y_j\}_{j=1}^N$ ，其中 z_j 是 d 维的量测向量，它对应着第 j 个样本的属性集， $y_j \in \{1, -1\}$ 表示第 j 个样本的类标号，如图 3 (a) 所示。假设数据集 D 完全可分，那么一定能够找到一个能将这两类数据严格区分开来的超平面，并且这类超平面可能存在无穷多个，如图 3 (b) 所示。若存在多个满足要求的超平面，那么到底哪一个超平面是最优的，尤其是当我们考虑所选择的超平面对于泛化误差的影响时？由结构风险最小化理论可知，具有最大化边缘的分离超平面可以确保最坏情况下的泛化误差最小，于是可以将上述的分类问题转化为最大边缘分类器求解问题。

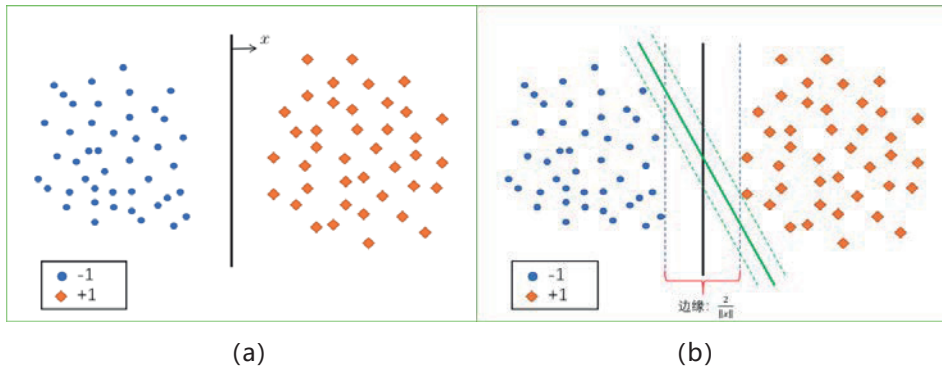


图3 最大边缘分类器

在此基础上, 我们进一步考虑一个更为庞大的数据集, 假设它的样本点数据分布于 m 个不同的数据中心, 每个中心 i 可获取的局部量测数据集记为 D_i , 那么整个数据集的最大边缘分类器问题可表示为如下的优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^m f_i(x), \quad f_i(x) = \frac{\alpha}{2m} \|x\|^2 + \sum_{j \in D_i} \max\{0, 1 - y_j \langle x, z_j \rangle\} \quad (1)$$

其中 $f_i(x)$ 表示第 i 个数据中心的局部目标函数, 它的第一项是对待求参数 x 的规则化项且包含了决策者的偏好权重, 第二项则刻画了参数 x 与数据集 D_i 的拟合程度。 $f_i(x)$ 不能被全局共享或者被其他数据中心所知, 这是因为每个局部目标函数里面包含了所有的局部量测数据及其偏好, 分享目标函数意味着要共享所有的局部量测数据集 D_i , 当 D_i 非常庞大时, 这将会给整个网络的通信和存储带来难以承受的代价和挑战, 同时也会使得包含个体偏好和敏感信息的隐私数据得不到保护, 且可能由于敏感信息的泄露而遭受网络安全攻击。因此, 我们需要设计分布式策略来求解问题(1)。

上述SVM问题可以看做是一个简单特殊的无约束分布式优化问题。下面我们给出一般形式的无约束分布式优化问题的模型, 即

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^m f_i(x), \quad (2)$$

其中全局的决策变量为 x , 每个个体 i 具有与全局决策变量 x 相关的局部代价函数 f_i , f 为整个网络的代价函数, 它是所有个体代价函数 f_i 的和。不同于集中式优化, 个体 i 的代价函数 f_i 只能被个体 i 观测到, 不能被全局共享或者被其他个体所知, 即个体 i 只可获取自身局部代价函数 f_i 在给定状态下的函数值、(次)梯度值或Hesse矩阵等信息, 而无法直接获取与其他个体的局部代价函数相关的任何信息。因此分布式优化目的是通过设计分布式算法使得个体之间仅利用局部的通信来协作找到问题(2)的全局最优解。

在无约束分布式优化问题中, 一个典型且基础的问题是分布式凸交计算。分布式凸交计算问题的具体描述是: 考虑一个由 n 个个体组成的网络, 每个个体 i 仅能获取凸集合 X_i 的信息, 而不知道对应于其它个体的集合 X_j , $j \neq i$ 。此网络的目的是通过个体之间的相互合作找到非空交集中的一个点。下面我们通过一个无线传感器网络合作源点定位的实例来刻画分布式凸交计算的主要思想。

例 2 考虑一个由 n 个位置已知的传感器（节点）来合作完成对某一监测区域内的一个位置未知源点的定位。由于信号在传播过程中随距离而衰减，每个传感器可以根据接收功率来计算传播损耗，进而估计源点位置。实际测量中，由于量测噪声的存在，使得由局部量测所获得的源信号信息并结合功率传播损耗模型而推导出的源点位置与真实的位置存在一定的误差。假设对每个传感器 i 而言，它可以计算得到一个对源点位置的局部估计圆盘区域 X_i ，但它不能获知其他传感器的估计区域 X_j ， $j \neq i$ ，如图 4 所示。在此假设下，原来的定位问题可以转换为一系列圆盘交集的计算问题，那么求解所得到的非空交集集中的点就可以作为对源点位置的估计。

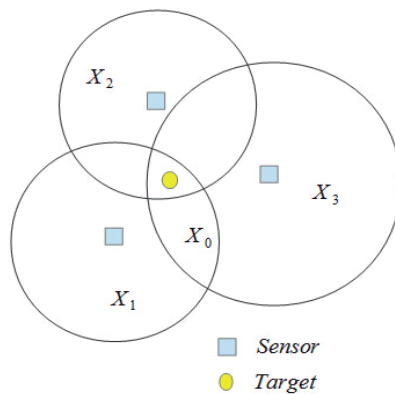


图 4: 无线传感器网络合作源点定位

针对分布式凸交计算问题，现已取得比较丰富的研究成果^[1]。比较常用的分布式算法包括基于投影算子和一致性算法的分布式投影同步算法，精确投射得不到情形下的近似投影同步算法，以及基于随机休眠的投影算法等。除此之外，实现分布式凸交计算过程的智能体还可以具有复杂的物理动态模型，关于这部分内容我们将在第 4 节详述。

对于一般的无约束分布式优化问题 (2)，涌现出很多不同形式的分布式算法和研究成果^[2,4]。相对而言较为经典的求解方法包括分布式次梯度算法、辅助约束法、分布式对偶平均算法、分布式 ADMM 算法、增广 Lagrange 算法以及惩罚函数法等。次梯度算法最早是由 Nedic 和 Ozdaglar 在 2009 年的文献[7]中提出，由于其算法形式简单容易执行，受到很多研究者的关注，并在此基础上衍生和发展出很多性能更好的变形算法，比如增量次梯度算法、分布式快速梯度算法、Push-Sum 算法等。辅助约束法是将一些“显然”的知识（最优性条件）加到算法中来提高算法的效率，研究该类问题的文献资料相对比较新。其中一类是加入图（同步）的条件，即从 Laplace 矩阵角度，引入同步约束条件 $Lx = 0$ ，然后再利用原始-对偶的思想对约束优化问题进行求解。这类加入有关图信息约束的算法在分布式优化研究中还是有一定的局限性，因为它不能直接处理切换图的情况。另一类利用了最优点的零梯度和性质，对于无约束问题而言，

其最优解满足零梯度和性质。将零梯度和条件作为约束引入到问题中，并且在算法迭代中一直保持该约束条件成立，即将算法的更新限制在零梯度和构成的流形上，该算法称为 gossip 算法。其算法的大体思想是在第 k 步迭代时任选一对个体 (i, j) 进行通信，在保持梯度和为零的性质不变条件下更新各自的状态，而对于其他没被选中的个体其状态保持不变。

总的来说，次梯度方法相比其他优化方法的优势在于其算法形式简单且对于代价函数的要求低（一般只须满足凸性即可），对于一般的凸优化问题都适用，其不足在于对步长渐进收敛到 0 的要求导致了收敛速度慢的弊端。而对于一般的非传统梯度方法，其出发点大都是从提高算法收敛速度的角度，但往往可能会伴随着算法形式的复杂化、维数的增加，代价函数光滑性的高要求，或者要提前已知个体间通信拓扑图的一些信息，这就使得非传统梯度方法具有一定的局限性，它们所适用的优化问题较次梯度方法更为特定一些。如 ADMM 算法的维数会随着网络边的增加而增加，由此导致在解决大规模非稀疏的网络优化问题时，对计算机的存储能力要求加大。

3 分布式约束优化

在实际应用中，很多优化问题决策变量的取值会受到一定的限制和约束，其约束形式主要包括受限集、等式约束和不等式约束三类。同样，在解决分布式优化问题时，我们也会碰到类似的约束问题，其中约束条件可以是全局共享也可以是局部已知，这取决于所求的具体问题。

针对一般的带受限集合的分布式约束优化问题，Nedic 等研究者在分布式次梯度算法的基础上增加了到局部约束集合上的投影操作，提出了一种分布式次梯度投影算法。在此基础上，后续一些研究者陆续提出了一些改进的弱通信拓扑条件下的分布式次梯度投影算法。尽管次梯度投影算法能够解决带受限集合的分布式约束优化问题，但是面对复杂的约束集合，计算集合外一点到集合的投影点需要进行复杂的运算，这将大大影响算法的效率，并增加计算的开销，从而降低算法的实用性。因此，针对不同的特定约束形式，研究者们提出了特定的技术处理方法^[9]。比如，针对包含全局不等式约束的优化问题，研究者提出了基于一致性的分布式原始对偶方法；针对局部不等式约束，有学者采用近似投影的方法来降低精确投影计算的开销，也有学者通过惩罚函数法将原来的约束优化问题转化为无约束的问题来求解，还有一些改进型分布式原始对偶算法。

下面我们通过一个智能电网中的最优负荷分配问题简要介绍一下分布式约束优化在电力系统中的具体应用。

例 3 考虑一个电力传输网络 $G = (N, E)$ ，如图 5 所示，其中 $N = \{1, \dots, n\}$ 代表母线集合，而 $E = \{1, \dots, m\}$ 代表传输线集合。若母线 $i, k \in N$ 通过传输线 $l \in E$ 连接，那么两者可传输有功功率。母线 i 的局部有功负荷，局部有功出力及与局部出力相关的成本函数分别记为 P_i^d ， P_i^g 和 $f_i(P_i^g)$ ，并且有功出力约束为 $\alpha_i \leq P_i^g \leq \beta_i$ 。传输线 l 的潮流 v_l 的传输约束为 $\gamma_l \leq v_l \leq \mu_l$ 。最优负荷分配问题，即在有功出力约束和潮流传输约束的限制下，合作分配各个母线的局部有功出力及传输线上的潮流以极小化的成本满足所有母线负荷需求，其数学描述如下：

$$\begin{aligned}
 & \min_{p^g, v} \sum_{i=1}^n f_i(p_i^g) \\
 & s.t. \quad p^g - Dv - p^d = 0 \\
 & \quad \alpha_i \leq p_i^g \leq \beta_i, \forall i \in N \\
 & \quad \gamma_l \leq v_l \leq \mu_l, \forall l \in E
 \end{aligned}$$

其中 $p^g = (p_1^g, \dots, p_n^g)^T$ 为有功出力组合, $p^d = (p_1^d, \dots, p_n^d)^T$ 为负荷向量, $v = (v_1, \dots, v_m)^T$ 为传输线功率潮流, D 为图 G 的关联矩阵。注意在此问题中, 母线 i 可以获取其自身的局部成本 $f_i(p_i^g)$, 局部出力约束 $\{\alpha_i, \beta_i\}$ 以及与其相连的传输线的传输约束 $\{\gamma_l, \mu_l\}$, 所以需要分布式的方式来求解。

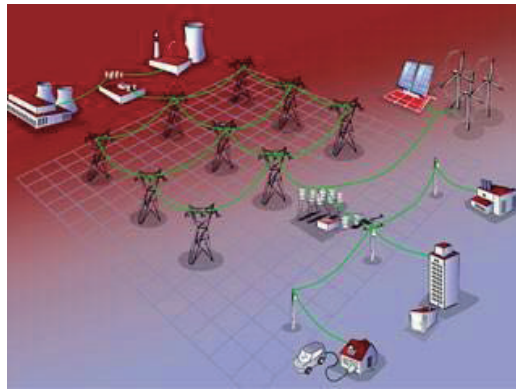


图 5: 电力系统的最优负荷分配 (图片源自百度)

虽说目前关于分布式约束优化的研究已经取得某些突破与成果, 但是总体上还处于发展阶段, 其理论研究往往局限于约束集和目标函数的凸性假设。在实际应用中, 尤其是大规模的资源分配和调度问题通常都是非凸的。此外, 在人脸识别、图像分类和生物信息学中的基因检测等领域中, 当处理高维度的数据和模型时, 为了防止优化问题的病态特征出现, 往往需要施加一些非凸的结构化约束来预防。一般而言, 非凸优化问题会存在多个局部最优解, 这个特性使得非凸优化问题比凸优化问题更难解决。

下面我们通过一个小蜂窝网络的功率谱分配问题来简要介绍一下非凸分布式约束优化在无线网络中的具体应用^[8]。

例 4 如图 6 所示, 考虑在一个宏基站 (MBS) 覆盖范围内布置 K 个小基站 (SBSs), 每个小基站 k 服务于 M_k 个用户 (SUEs), 在每个小基站 k 覆盖范围内有 W_k 个 Wi-Fi 接入点, 小基站与这些 Wi-Fi 接入点可以共享非授权信道, 为了避免强同信道干扰, 不同的 Wi-Fi 接入点使用不同的非授权信道。同时为了提高授权频段的谱效, 假设小基站也可以复用宏基站的上行信道服务用户的下行传输, 授权频段由 N 个带宽相同的子信道构成。在保证小基站与 Wi-Fi 系统的和谐共存 (不能因为小基站用户共享 Wi-Fi 接入点的非授权频谱资源而使原来 Wi-Fi 用户的 QoS 下降), 同时由于复用宏基站授权频谱而给宏基

站带来的干扰不影响原有主用户的 QoS 的情况下, 授权信道和非授权信道上总谱效的最大化问题可建模为分布式约束优化问题, 感兴趣的读者可参阅文献[8]。

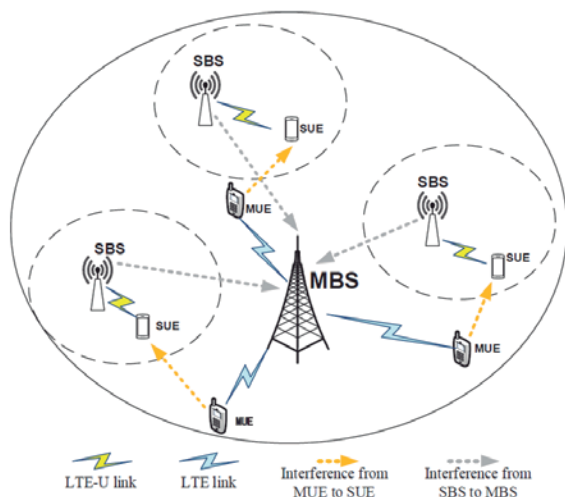


图6 小基站网络的功率谱分配

上述优化问题是非凸的, 目标函数和部分约束都是非凸的, 给问题的分布式求解带来一定的难度。比较常用的处理这类问题的方式是采用凸松弛或者凸近似的技术手段, 将原非凸优化问题转化为或近似为凸优化问题来求解以避免非凸带来的问题求解难度, 由此使得如何选择一种有效的凸松弛或凸近似方法变得尤其重要。除了上述提到的两种方法外, 另一种比较常用的处理非凸问题的技术手段是采用智能优化算法来分布式求解。总的来说分布式带约束优化的研究仍处于发展阶段, 还有很多的问题亟需解决和深入研究。

4 高阶系统的分布式优化

近年来, 连续时间的分布式优化算法在控制领域引起越来越多的关注, 尤其是随着信息物理融合系统的快速发展, 如何能让优化计算、网络通信和系统控制三个不同研究领域有效地相互融合及交叉发展, 具有非常重要的理论和现实意义。因为, 在实际应用中, 只满足被控对象的稳定性是不够的, 如何能达到最经济、最高效的控制策略逐渐成为人们的关注焦点, 尤其是如何能让实体的物理系统在稳定运行的同时还能实现预定的优化指标。本节主要介绍高阶连续时间系统的分布式优化, 即实现分布式优化过程的智能体具有高阶复杂的线性或非线性的物理动态模型。此类问题的研究目标是对系统中的每个个体设计分布式控制算法, 使得每个个体仅在局部通信条件下就能实现在保证自身系统稳定运行的同时, 还能使得所有个体的输出都能收敛到无约束分布式优化问题或分布式约束优化问题的最优解。

下面我们通过一个多机器人系统合作定位与跟踪的实例来刻画分布式优化在移动多机器人系统中的应用^[9]。

例 5 考虑一个由 n 个机器人构成的移动多机器人网络来合作完成对某一监测区域内的一个位置未知源点的定位与跟踪。每个机器人的动力学可由如下的 Euler-Lagrange 方程表示：

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + G_i(q_i) = \tau_i$$

其中 q_i, \dot{q}_i 分别表示系统的状态和速度变量， $M_i(q_i)$ 和 $C_i(q_i, \dot{q}_i)$ 分别为系统的参数矩阵和参数向量，

$G_i(q_i)$ 是引力向量， τ_i 是控制力矩。对每个机器人配置一些具有一定感知、计算、存储和通信能力的传感器装置，它们可用来探测源点发出的信号并与一定范围内的邻居机器人通信。每个机器人可以根据自身所得的局部信息、通过执行一定的局部计算来协作完成对未知源点的位置估计。在实际的应用中，由于外界环境因素及各种不确定性因素的影响导致量测误差的存在，从而使得由局部量测所获得的源信号信息结合理想环境中的信号衰减模型而推导出的源点位置与真实的位置存在一定的误差。假设对每个机器人 i 而言，它可以得到一个对源点位置的局部估计区域 X_i ，但它不能获知其他机器人的估计区域 X_j ， $j \neq i$ ，如图 7 所示。记第 i 个机器人对源点位置估计的误差函数 $f_i(q_i)$ 为该估计值到其估计区域 X_i 的距离，那么整个网络的目的就是通过机器人之间的局部相互合作，使得系统在总的误差函数最小的情况下所有的个体同步到最优点 $q^* = \arg \min_q \sum_{i=1}^n f_i(q)$ ，并将此点作为对未知源点的位置估计，即合作寻找到这一系列估计区域距离求和最近的点。

关于高阶系统的分布式优化问题，现有的研究成果大多是基于 Lyapunov 稳定性的相关控制理论知识设计最优的分布式控制算法并进行理论的收敛性分析。但是针对受限的约束优化问题，亟待发展新的理论和工具来研究设计高阶的分布式优化算法。

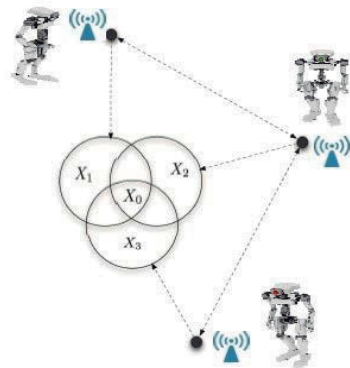


图 7 多机器人合作定位与跟踪

5 总结与展望

本文主要通过介绍分布式优化在不同研究领域的应用实例，阐述了三类典型的分布式优化模型。从上述的几个例子我们可以发现，在分布式优化问题中个体的局部目标函数、局部约束集合或局部敏感数据不能被其他个体所共享，但是问题中又可能会存在耦合的决策变量或全局耦合的约束，所以个体必须通过合作才能获取优化问题的最优解。因此，分布式优化的基本思想可概括为在一个大规模的复杂网络中，每个个体只知道优化问题的部分信息（包括代价函数、性能指标和资源约束等），利用个体间的局部相互合作来完成网络整体的优化目标。

分布式优化可用来解决许多集中式优化难以处理的大规模复杂的优化问题，继承了分布式算法所特有的高效性、鲁棒性和可移植性等优点，同时它还具备以下的特点和优势：（1）信令开销小，在分布式优化中，个体的局部数据（目标函数、约束函数、约束集合）无须传送到中心节点或共享给其他个体，个体只须与其邻居个体进行局部的信息交流，而无须全局一对一通信，这样可以极大程度降低网络的通信成本。（2）安全性强，个体可根据自身局部的数据信息（量测、先验信息、偏好、动力学和物理约束等）自主地决定局部目标函数、局部约束函数及局部通信的信息，使得个体具有了一定的自主性且隐私得到了保护。

经过近十几年的发展，分布式优化的研究已经取得了丰硕的成果，但是目前大多数的研究结果主要侧重于理论分析。分布式优化在诸如智能电网中的经济调度、资源分配、最优潮流问题，无线传感器的定位，信息物理融合系统的优化控制，通信网络中的频谱资源分配、基站选址问题，分布式机器学习等应用领域中还存有广阔的应用前景。如何将分布式优化的理论研究与应用紧密结合，是一个值得继续深入研究和探索的方向。

参考文献

- [1] 洪奕光, 张艳琼. 分布式优化: 算法设计和收敛性分析. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 850–857.
- [2] Fioretto F, Pontelli E, Yeoh W. Distributed constraint optimization problems and applications: A survey. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2018, 61: 623–698.
- [3] Xin R, Pu S, Nedic A, et al. A general framework for decentralized optimization with first-order methods. *Proceedings of the IEEE*, 2020, 108(11): 1869–1889.
- [4] Ghojogh B, Ghodsi A, Karray F, et al. KKT Conditions, First-Order and Second-Order Optimization, and Distributed Optimization: Tutorial and Survey. arXiv preprint arXiv:2110.01858, 2021.
- [5] 王龙, 卢开红, 关永强. 分布式优化的多智能体方法. 控制理论与应用, 2019, 36(11): 1820–1833.
- [6] Yang T, Yi X, Wu J, et al. A survey of distributed optimization. *Annual Reviews in Control*, 2019, 47: 278–305.
- [7] Nedic A, Ozdaglar A. Distributed Subgradient Methods for Multi-Agent Optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(1): 48–61.
- [8] Yin R, Liu S, Yu G, Zhang Y, Chen Q. Semi-distributed joint power and spectrum allocation for LAA based small cell networks. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2020, 19(6): 4141–4153.
- [9] Zhang Y, Deng Z, Hong Y. Distributed optimal coordination for multiple heterogeneous Euler-Lagrangian systems. *Automatica*, 2017, 79: 207–213.



【作者简介】张艳琼, 1987 年出生, 杭州电子科技大学自动化学院副教授, 从事分布式优化、博弈和控制等方面的研究。