状态空间方法 vs 全驱系统方法（III）
——从综合能力看两种方法论

段广仁
南方科技大学 控制科学技术研究院
哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心

摘要：基于物理机理对一个系统进行建模时，首先获得描述系统的一组基础方程。进一步通过变量增广便可将该组基础方程转化为系统的一阶状态空间模型；通过变量消元便可将该组基础方程转化为系统的高阶（全驱）模型。这两种不同的出发点导致了两种完全不同的方法论。作为控制系统分析与控制的一种新的方法论，全驱系统方法具有多方面的优势。本文列举了全驱系统方法的八方面优势，并对前七个方面进行了说明。

关键词：非线性控制，状态空间方法，全驱系统方法，时变系统，时滞系统

0 引子

关于全驱系统方法[1-13]，我们前阶段完成了下述两篇学术杂文：

1. 《状态空间方法 vs 全驱系统方法（I）——从全局镇定问题看两种方法论》（系统控制与纵横，第 8 卷第 2 期）；
2. 《状态空间方法 vs 全驱系统方法（II）——从能控性问题看两种方法论》（系统控制与纵横，第 9 卷第 1 期）。

在第一篇中，我们比较了状态空间方法和全驱系统方法这两种方法论在处理控制系统镇定问题上的优势。第二篇杂文进一步论证了状态空间方法下的非线性控制系统能控性理论存在的问题，并从高阶全驱系统方法论的角度重新定义了动态控制系统的能控性。

经过半个多世纪的研究，状态空间方法的内容是非常丰富的。作为与其平行的另一种方法论，高阶全驱系统方法也应该能够处理状态空间方法中的各类控制问题，并应给出更好的结果。只是由于它提出

才仅仅两年，我们现在就拿很高的标准来要求它是不合理的。

本文想说明这样一个问题：虽然关于高阶全驱系统方法的理论和应用结果现在还很少，但是它的发展前景是十分广阔的，因为它的综合能力很强、潜力极大。

和前两篇杂文一样，本文也不追求表述的严格性，而是更注重表达基本思想。或许第一次阅读本文的读者还需要浏览一下前面的两篇杂文或者相关文献[1-13]。

1 全驱系统方法的综合能力

首先来回忆一下状态空间方法和全驱系统方法这两种方法的应用过程。面对一个实际系统，我们首先要做的是系统建模，基于一系列物理定律或其他的准则得到所谓的一组基础方程。接下来使用不同的方法，所采用的路线就大相径庭了。

如果采用状态空间方法，我们就要通过变量增广把描述系统的基础方程化成一组一阶微分方程，也就是所谓的一阶状态空间模型

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$

这个模型眷顾的是系统的状态 x，而不是控制输入 u。由于控制分布矩阵一般是一个降秩矩阵，想要利用这个模型求出 u 来一般说来是件很困难的事情。

如果采用全驱系统方法，就要通过变量消元把基础方程化成一个高阶全驱系统，如

$$x^{(n)} = f(x^{(0\sim n-1)}) + B(x^{(0\sim n-1)})u \tag{2}$$

我们记

$$\mathbb{S} = \{X \mid \det B(X) = 0 \text{ or } \infty\}$$

并称$\mathbb{S}$为系统的奇异点集合，称其补集为系统的可行集，记为$\mathbb{F}$。当可行集$\mathbb{F}$不空时我们称该系统为全驱的，特别地，当奇点集$\mathbb{S}$为空集时称系统为大范围全驱的，当其不空时称系统为亚全驱的。关于全驱系统，乃至于大范围全驱系统的普遍性就不在这里重述了，请见第一篇杂文或系列报告一，亦可见文献[1, 2, 4, 10]。

对于全驱系统模型(2)，虽然状态x不好直接求取了，但控制输入u好求了。因为控制输入矩阵 B 满秩，我们便可以选取系统(2)的控制律如下：

$$u = -B^{-1}(f + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} - v) \tag{3}$$

所得的闭环系统如下：

$$\begin{cases} x^{(n)} + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} = v \\ x^{(0\sim n-1)} \in \mathbb{F} \end{cases} \tag{4}$$

这是一个受限的线性系统。对于大范围全驱系统，闭环系统是一个独立的线性系统：

$$x^{(n)} + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} = v \tag{5}$$

显然，基于这种能轻松地显式求出u来的模型做控制设计一定是简单、直接、方便的。这就是这两种方法论的根本差别。这种特性决定了全驱系统方法拥有很强大的综合能力，具体表现在下述几个方面：

1. 让更多的系统拥有了全局稳定性；
2. 让非线性系统有了合理的能控性体系；
3. 让 Lyapunov 稳定性和镇定拓广到亚稳定性和亚镇定；
4. 让闭环系统的响应分析和稳定性分析变得容易；
5. 让一些传统难题，如 Morgan 问题，得以轻松解决；
6. 让很多时变系统的控制不再成为问题；
7. 让很多带有状态时滞的系统控制不再成为问题；
8. 让线性系统有了真正的用武之地。

下面我们分别对上述前 7 个方面进行说明。关于第 8 点，将另文讨论。

2 几个基本方面

我们先来解释上述的前 5 个方面。

2.1 让更多的系统拥有了全局稳定性

采用状态空间方法，控制律的设计问题将严重依赖于函数f和B的复杂性，导致很多问题无法求解，或者很多问题只能求得局部镇定解。现实中的情形是，如果对于某类具有一定广泛程度的系统得到了全局镇定控制律，那就是一件可喜可贺的事情了。

采用全驱系统方法，利用系统的全驱特性可以得到一个期望的线性定常的闭环系统。能做到这样，当然是实现了全局镇定，而且还是全局指数镇定。况且优点还不止于此，闭环系统不再依赖于f和B的复杂性。事实上，无论它们多么复杂，只要控制系统的全驱特性不遭到破坏，就总可以设计出控制律使得闭环系统为期望的定常线性系统。因为它们的复杂性可以完全被控制律所“吸纳”。这就是全驱系统所拥有的控制能力[1, 4, 6-8, 10, 13]。

由此可见全驱系统的能力和潜力，它让更多的系统拥有了全局稳定性。对此我们在全驱系统系列杂文 1 中做了更加全面详实的论述。

2.2 让非线性系统有了合理的能控性体系

关于这方面，详见第二篇杂文：从能控性问题看两种方法。

关于状态空间方法下的能控性，我们大多了解的是线性系统的能控性。客观地说，了解非线性系统能控性理论的人不多，因为国际上许多非线性系统方面的权威著作，如 Isidori 的《Nonlinear Control Systems》(1995 的第三版)，Khalil 的《Nonlinear Systems》(2002) 和《Nonlinear Control》(2014)，都不谈非线性系统的能控性。一些人想当然以为非线性系统的能控性理论也像线性系统的能控性理论那么好，而事实远非如此。关于非线性系统能控性的定义繁多，有些还不合情理，比如在能控性的条件下还不存

在连续的镇定控制律。另外，关于非线性系统的能控性有了定义也给不出像样的条件。微分几何方法是给出了能控性条件，但只是针对弱能控的情形，关于常规情形仍然给不出条件。但在全驱系统方法的框架下我们揭示了能控性的本质，给出了非线性系统的一个新的能控性体系，解决了上述一些问题[2, 10, 14]。

2.3 让 Lyapunov 稳定性和镇定拓展到广亚稳定性和亚镇定

通过研究亚全驱系统的控制问题，我们提出了亚稳定和亚镇定的概念。这种亚稳定性实际上还有很多背景，也偶有论文讨论，但是太零散，不成体系。

我们谈到渐近稳定性时，一定会涉及吸引域这一概念。常规 Lyapunov 稳定性的吸引域一般是一个以原点为中心的实球体。所谓实，是指里面没有缝隙，没有空洞，其内部所有点出发的轨迹最终都要跑向原点。但现在我们在球上挖个洞，比如说挖掉个顶点在原点的锥形体，从这个锥形体里面跑出来的解不再收敛到原点，这种情况就是亚稳定。

这种亚稳定有没有意义呢？当被挖掉的锥形体较小时，答案还是肯定的。当挖去的部分太大，剩下的部分太小时，也就用处不大了。但注意到亚稳定吸引域实际上是指数稳定的吸引域，如果剩下的部分或其局部仍然是一般渐近稳定意义下的吸引域，将两者合起来考虑对于分析问题当然也会有进一步的帮助。

很多工程上的问题，系统初值就不是在全空间选的。比如，一个倒摆的初值总是选在水平面的上半平面。还有所谓的正系统，所有时刻的状态都要在状态空间的第一象限，其稳定性实际上就是一种亚稳定性的概念。这些背景都是零散的，没有体系性的内容支撑，自然也就没有形成系统性的理论。在全驱系统方法的应用中，一旦涉及亚全驱系统，就要有非空的奇点集存在。这种奇点集就构成了我们所说的缝隙或空洞。由此便可以形成了亚全驱系统亚镇定的一套完整的理论[15, 16]。

2.4 让闭环系统的响应分析和稳定性分析变得容易

这一点很好理解，闭环系统都是定常的线性系统了，当然其响应和稳定性分析都很容易了。另外，即使不是线性，而是“线性+摄动”的形式，也比纯非线性系统的分析要容易得多。

这样的结论看似好像在设计中没用，因为这已经是最后的结果了。其实不然，对于一个较大的问题，在设计的中间环节就可能用到某些子系统的解或稳定性结果，此时这样的结果对后面的推导和分析就有用了，所以这是对于设计和分析都非常重要的事情[1]。

2.5 让一些传统难题，比如 Morgan 问题，得以轻松解决

著名的 Morgan 问题，也就是输入输出解耦问题，是一个很不简单的问题。即使在线性的情况，这一问题的求解也是相当复杂的，对于非线性的情形一直有很多人在研究，但结果都是充分性的。

在全驱系统方法的框架下，闭环系统是一个线性系统(5)，其中的系数矩阵$A_{0\sim n-1}$是任取的。我们只要把$A_{0\sim n-1}$中的分块矩阵取成一系列的对角矩阵便实现了由v到x的解耦[1]。事实上，机器人领域的许多学者就是这么做的。他们针对物理上的二阶全驱系统，利用这种做法把闭环系统分成了两个或者多个单变量二阶线性系统进行设计，其中很多还是用频域理论完成的设计。

3 让很多时变系统的控制不再成为问题

我们接下来阐述全驱系统方法综合能力的第六个方面。

时变系统背景是广泛的，自不多言。

时变系统的稳定性问题具有很强的挑战性，即便是线性时变系统，其稳定性也是一个难题。一个线性定常系统是否稳定完全由矩阵 A 的特征值决定。可是对于线性时变系统，情形就复杂了。且看下述三个时变矩阵：

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} 1-4\cos^2(2t) & 2+2\sin(4t) \\ -2+2\sin(4t) & 1-4\sin^2(2t) \end{bmatrix}$$

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} -2+4\cos t & \cos t \\ \sin t & -2+4\cos t \end{bmatrix}$$

$$A_3(t) = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2}+\frac{15}{2}\sin(12t) & \frac{15}{2}\cos(12t) \\ \frac{15}{2}\cos(12t) & -\frac{11}{2}-\frac{15}{2}\sin(12t) \end{bmatrix}$$

矩阵$A_1(t)$的两个特征值都是-1，可对应的线性系统却不稳定。矩阵$A_2(t)$的两个特征值经常到复平面的右半平面去溜达一圈，可是对应的线性系统却稳定，正所谓：“常在河边走，就是不湿鞋”。更有甚者，矩阵$A_3(t)$的系统特征值已经有一个是$+2$了，可系统居然是稳定的。这就是时变系统！

Rudolf Kalman 说，对于时变系统，要拿出像定常系统那样的判据，在短时期是不可能的（There is little hope that the state of affairs will change soon）。这是他 1960 年的预言。老先生已经仙逝了，但今天这种预言还没有被打破。

控制界有一本关于公开难题的书，题目是《Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory》，出版于 1999 年。三位作者全是控制界著名人士：E. Sontag、J. Willems 和 V. Vidyasagar。这本书列举了 53 个控制界的公开难题，其中的第一个难题就是线性时变系统的一致渐近稳定性。可见时变系统的问题是多么难。

线性时变系统尚且如此之难，又何况非线性时变系统呢？

我们再来看一下非线性系统领域中的几大著作。第一部是 Isidori 的著作《Nonlinear Control Systems》(1995 的第三版)。然后是 Khalil 的两部著作，《Nonlinear Systems》（2002）和《Nonlinear Control》（2014）。第四部是程代展研究员的著作《非线性系统的几何理论》。在这些经典著作中，至少 90%的内容都集中在定常系统(1)上。

我们想过没有？如果把时间 t 加进系统(1)中会怎样？夸张一点说，就这么个简单操作就会让原来的体系近乎崩塌，让原来的很多方法都失效！试想，加了时间 t 之后所涉及的微分变成什么样子？常用的微分同胚变成什么样子？微分几何方法又有多少理论尚能存在？

时变系统是多少人毕生的研究对象，即使线性时变系统也让很多人付出了毕生的精力。但好处是它给很多人提供了无穷尽的展示才华的机会。

可以说时变系统的很多结果都集中在稳定性分析上。为什么要做稳定性分析呢？传统的认知是稳定性分析为控制系统设计服务。如果时间倒退五年我完全赞同，可现在我认为这至少不是全对的。用稳定性分析捆绑出的结果从来都不是最好的！基于分析结果做设计是控制系统设计在状态空间方法下不得已的需要。因为没办法，没有其他的路，所以才一定要走这条路。

我们能够摆脱这个魔咒吗？会有机可投、有巧可取吗？那就要冲出状态空间方法框架的束缚。

在全驱系统的框架下，单阶的时变系统可以一般地表述如下：

$$x^{(n)} = f(x^{(0\sim n-1)}, t) + B(x^{(0\sim n-1)}, t)u \tag{6}$$

此时我们仍然可以选取形如(3)的控制律，同样获得一个受限的线性闭环系统。但值得注意的是此时系统的奇点集和可行集都是和时间相关的。如果系统是大范围全驱的，则可以得到一个期望的定常的线性闭环系统。

在状态空间模型(1)中把时间 t 加进去，好多方法会失效。原本的各种方法都严重依赖$f(\cdot)$和$B(\cdot)$的复杂性，现在更是雪上加霜。然而由上述可见，在全驱系统方法的框架下，加上时变性却无关痛痒。

4 让很多带有状态时滞的系统控制不再成为问题

我们接下来阐述全驱系统方法的第七点强大之处。

许多著名学者，包括 M. Krstic，都对时滞系统有过评述。时滞系统在物理和工程上无处不在，是个悬而未决的挑战性问题。客观上说，无论在普遍性和挑战性方面，时滞系统绝不亚于时变系统。

在状态空间方法框架下研究时滞系统很难。即使对于线性时滞系统的稳定性，人们都给不出一般的充要条件来，非线性时滞系统方面的一般性结果就更少了。

一件事虽然很难，但总有很多特例可以做。这就给人们提供了一个长期的研究方向。做时滞系统的人有多少呢？我们来看看有多少人写了关于时滞系统方面的书吧。结果是令人吃惊的。在 Amazon 网站上搜索关键词 time-delay systems，给出的结果已经不是一个具体数字了，而是“over 1000”！这说明什么？这只能说明时滞系统的问题很难，距离目标、距离彻底解决很遥远。

如果我们在状态空间模型中再加上状态时滞项，即得

$$\dot{x} = f(x, \zeta_x, t) + B(x, \zeta_x, t)u \tag{7}$$

其中

$$\zeta_x = \begin{bmatrix} x(t-\tau_1) \\ x(t-\tau_2) \\ \vdots \\ x(t-\tau_p) \end{bmatrix}$$

稍有一些这方面知识的人便知道，这该是一个多么难的问题。如果我们再允许时间滞后时变，则更是令人崩溃。在非线性系统中加上时滞项，对于原来的非线性系统理论已经不只是雪上加霜了，而是霜上加

冰了！

可是另一方面，如果我们在高阶全驱系统模型中加上状态时滞项，即得

$$x^{(n)} = f(x^{(0\sim n-1)}, \zeta_X, t) + B(x^{(0\sim n-1)}, \zeta_X, t)u \tag{8}$$

其中

$$\zeta_X = \begin{bmatrix} x^{(0\sim m-1)}(t-\tau_1) \\ x^{(0\sim m-1)}(t-\tau_2) \\ \vdots \\ x^{(0\sim m-1)}(t-\tau_p) \end{bmatrix}$$

这又有什么关系呢？只要全驱特性不破坏，我们就可以设计出形如(3)式的控制律，并且仍然使得闭环系统为一个期望的定常的线性系统。当然，如果需要，也可以获得一个期望的时滞线性系统。这又是一件无关痛痒的事情。这就是差别。全驱系统方法使时滞系统的控制不再成为问题，至少使得带有状态时滞的系统的控制问题不成问题[17-20]。

对于控制输入中带有时滞的情形，尚需进一步研究。但我们相信，在全驱系统方法的框架下，问题也将相对容易，并将很快有重要结果出现[20]。

值得指出的是，上述有关说明都是以单阶次仿射全驱系统模型为例来表述的。事实上，有关结论对于多阶次全驱系统模型以及非仿射全驱系统也都是成立的。

5 结束语

在一种方法论下极其困难的一件事情在另一种方法论下可以变得非常容易。这是科学研究中常有的事情。

状态空间方法，我们使用了半个多世纪，我们极不情愿去说它不好。人们往往也极不情愿去颠覆自己已有的认知，但我们还是要尊从理性，尊重事实。

Rome is not built within a day！全驱系统方法中还有很多我们一时无法解决的问题。但是，

- 我们已经看到状态空间方法解不了和解不好的很多问题在全驱系统方法下都得到了圆满的解决；
- 当下全驱系统方法解决不了的问题其实本来也都是状态空间方法长期以来解决不了的；
- 半个多世纪全世界控制人士都没有解决的问题指望全驱系统方法在两年的时间里都得到解决是不现实的，但这其中的很多问题一定会随着人们的逐渐参与更快得到解决。

最后重申，高阶全驱系统理论是一个非常广阔的开拓性研究领域！衷心希望我国更多的年轻学者加入这一领域的研究中来，尽快做出一批具有原创性和颠覆性的成果，推动非线性控制理论的发展。

6 致谢

感谢南京理工大学邹云教授所提出的有益建议。

参考文献

[1] 段广仁. 高阶系统方法— I. 全驱系统与参数化设计 [J]. 自动化学报, 2020, 46(7): 1333–1345.

[2] 段广仁. 高阶系统方法— Ⅱ. 能控性与全驱性 [J]. 自动化学报, 2020, 46(8): 1571–1581.

[3] 段广仁. 高阶系统方法—III. 能观性与观测器设计 [J]. 自动化学报, 2020, 46(9): 1885–1895.

[4] Duan G R. High–order fully actuated system approaches: Part I. Models and basic procedure [J]. Int. J. Systems Science, 2021, 52(2): 422–435. DOI:10.1080/00207721.2020.1829167.

[5] Duan G R. High–order fully actuated system approaches: Part II. Generalized strict–feedback systems [J]. Int. J. Systems Science, 2021, 52(3): 437–454. DOI:10.1080/00207721.2020.1829168.

[6] Duan G R. High–order fully actuated system approaches: Part III. Robust control and high–order backstepping [J]. Int. J. Systems Science, 2021, 52(5), 952–971. DOI: 10.1080/00207721.2020.1849863.

[7] Duan G R. High–order fully actuated system approaches: Part IV. Adaptive control and high–order backstepping [J]. Int. J. Systems Science, 2021, 52(5), 972–989. DOI: 10.1080/00207721.2020.1849864.

[8] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part V. Robust adaptive control," Int. J. Syst. Sci., vol. 52, no. 10, pp. 2129–2143, Feb. 2021.

[9] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part VI. Disturbance attenuation and decoupling," Int. J. Syst. Sci. , vol. 52, no. 10, pp. 2161–2181, Feb. 2021.

[10] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part VII. Controllability, stabilizability and parametric design," Int. J. Syst. Sci., vol. 52, no. 14, pp. 3091–3114, May 2021.

[11] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part VIII. Optimal control with application in spacecraft attitude stabilization," Int. J. Syst. Sci., vol. 53, no. 1, pp. 54–73, 2022.

[12] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part IX. Generalized PID control and model reference tracking," Int. J. Syst. Sci., vol. 53, no. 3, pp. 652–674, 2022.

[13] Duan G. R., "High–order fully actuated system approaches: Part X. Basics of discrete–time systems," Int. J. Syst. Sci., vol. 53, no. 4, pp. 810–832, 2022.

[14] Duan G. R. and B. Zhou, "A frequency–domain approach for converting state–space models into high–order fully actuated models," J. Syst. Sci. Complex., to be published, DOI:10.1007/s11424–022–1361–8.

[15] Duan G. R., "Stabilization via fully actuated system approach: A case study," J. Syst. Sci. Complex., 2022. DOI: 10.1007/s11424–022–2091–7.

[16] Duan G. R., Brockett's First Example: An FAS Approach Treatment, J. Syst. Sci. Complex., vol. 35, pp.441–456, 2022.

[17] Duan G. R., "Discrete–time delay systems: Part 1. global fully actuated case," Sci. China–Inf. Sci., 2022. DOI: 10.1007/s11432–021–3417–3.

[18] Duan G. R., "Discrete–time delay systems: Part 2. sub–fully actuated case," Sci. China–Inf. Sci., 2022. DOI:10.1007/s11432–021–3448–1.

[19] Duan G. R., "Fully actuated system approaches for continuous–time delay systems: Part 1. Systems with state delays only," Sci. China–Inf. Sci., 2022. DOI: 10.1007/s11432–021–3459–x.

[20] Duan G. R., "Fully actuated system approaches for continuous–time delay systems: Part 2. Systems with input delays," Sci. China–Inf. Sci., 2022. DOI: 10.1007/s11432–021–3460–y.

【作者简介】段广仁，中国科学院院士，中国自动化学会会士，IEEE Fellow，IET Fellow；1991 年任哈尔滨工业大学教授，现为哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心名誉主任、南方科技大学控制理论与技术研究中心主任；是国家杰出青年基金获得者、长江学者、教育部长江学者创新团队项目负责人，国家自然科学基金委的创新群体、重大项目和基础科学中心项目负责人、国家某重大专项基础研究重大合同项目负责人。现（曾）任中央军委科技委国防科技专家、国务院学位委员会第八届控制科学与工程学科评议组召集人、国家 863 计划专家组成员、航天科技集团五院国防科技重点实验室第一、二届学术委员会委员、教育部科技委信息学部委员、中国自动化学会常务理事和国内外重要学术刊物编委等职。作为第一完成人获得国家自然科学二等奖 2 项，另获第四届中国青年科技奖、中国自动化学会控制理论专业委员会杰出贡献奖和全国优秀科技工作者称号；发表 SCI 论文 340 余篇，出版英文著作 3 部，出版的一部中文著作获得两项国家级图书奖励；培养的博士生有 2 人论文入选全国优秀博士学位论文，培养的博士生中已有学生成长为国家优青、IEEE Fellow、长江学者、国家杰青和中国工程院院士。主要研究方向有控制系统的参数化设计、鲁棒控制、非线性控制和航天器控制等。