

群体行为形成初探： 合作-竞争网络建模与演化

胡江平 电子科技大学自动化工程学院

自宇宙形成以来，自然万物形成了“物以群分、人以类聚”的“弱肉强食”、“适者生存”网络结构格局。在这样的网络格局中，个体之间既相互合作，又相互竞争。万物正是在这种合作-竞争共存的相互作用下涌现出复杂而丰富的演化行为，例如：聚集（集中到一点）、集群（以整体形式移动）和编队（以一定队形移动）。这些群体行为在自然进化、生物繁衍、人类活动、工程应用中已经得到广泛体现。为了便于研究，针对多个体之间同时存在合作与竞争的共存关系，科学家将其定义为“coopetition”（cooperation 和 competition 的合写形式），并将含有这种关系的网络系统称为合作-竞争系统^[1]。

合作-竞争系统广泛存在于各个领域。在生物学领域，动物之间需要通过合作来寻找食物或者防备捕食者的进攻；但在面临资源有限时，它们又会相互竞争^[2]。另外，基因通过相互合作（激活因子）与竞争（抑制因子）影响着人类健康与疾病^[3]。在经济领域中，提供相同产品或者类似服务的代理通常被视为竞争对手，企业会倾向于加入一个规模庞大的联盟，与竞争对手相互竞争，同时最大化自身利益^[4,5]。在工程和军事领域中，友方机器人通过合作去围捕、拦截敌方机器人^[6,7]。在合作-竞争系统中，群体行为除了同步、分裂，往往还会涌现出一种个体状态大小相同、方向相反的一致性现象，通常称之为二部一致性或者极化^[8,9]。接下来，我们将简要介绍一下群体行为涌现背后合作-竞争系统的建模机制以及动态演化规律。

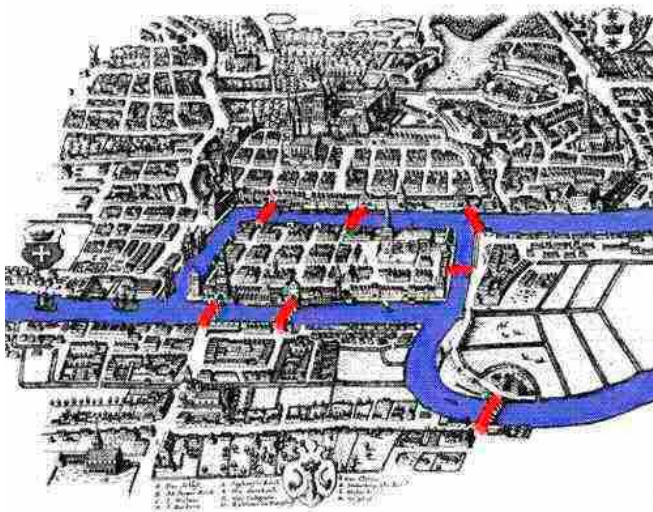


图 1. 哥尼斯堡七桥

1. 图论：合作-竞争系统的建模利器

18 世纪初，普鲁士的哥尼斯堡（现为俄罗斯加里宁格勒州首府加里宁格勒），有一条河穿过，河上有两个小岛，有七座桥把两个岛与河岸联系起来（如图 1 所示）。

有人提出一个问题：一个步行者怎样才能不重复、不遗漏地一次走完七座桥，最后回到出发点。瑞士数学家欧拉于 1736 年将这个问题转化成一个几何问题——一笔画问题。他不仅解决了此问题，且给出了连通图可以一笔画的充要条件是：奇点的数目不是 0 个就是 2 个（连到一顶点的边数目如是奇数条，就称该顶点为奇点；如果是偶数条，就称之为偶点）。自从图论建立以来，图论已经成为网络与人工智能领域中的一个强有力工具。

在合作-竞争系统中，当我们把个体看成一个顶点的时候，可以利用图论中的符号图来描述这种合作与竞争关系共存时的耦合关系拓扑结构（如图 2 所示）^[9]。

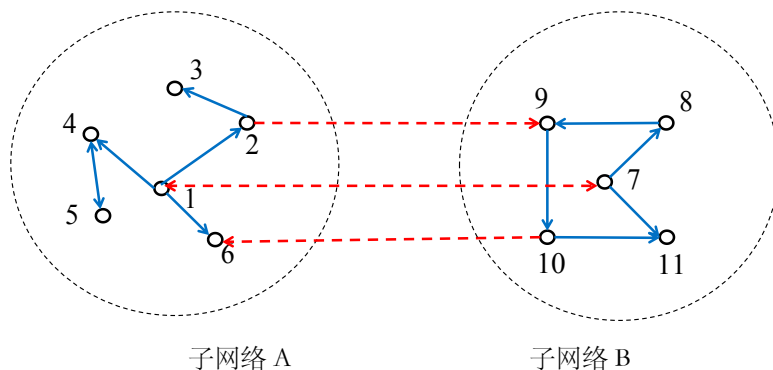


图 2. 符号图

在符号图中，顶点之间的正边（蓝色实线）和负边（红色虚线）分别用来表示个体之间的合作关系和竞争关系。在图 2 中，有两个相互竞争的子网络 A 和 B，而每个子网络内部的个体是相互合作的。

准确来讲，一个有向符号图可以表示成为一个集合 $G=(V,E,A)$ ，其中， $V=(1,\dots,N)$ 表示图的顶点集合， $E\subseteq V\times V$ 表示图中的边集合， $A=\{a_{ij}\}_{n\times n}$ 表示图的邻接矩阵。图的邻接矩阵表示不同个体之间的相互作用关系强度。当 $a_{ij}\neq 0$ 时，表示从节点 i 到节点 j 有一条边。具体而言，当 $a_{ij}>0$ 时，表示节点 i 对节点 j 是友好、合作的；相反地，当 $a_{ij}<0$ 时，表示节点 i 对节点 j 是敌对、竞争的。

2. 合作-竞争网络的结构平衡性

2.1 结构平衡性定义

在介绍符号图的结构平衡性之前，我们先介绍一下正关系和负关系的最基本模型。假设一群人构成一个社会网络，其中每个人都相互了解，则每对顶点间都有一条边，这样的网络叫作完全图^[9]。用“+”或者“-”来标识每条边：“+”表示两个顶点是朋友，“-”表示两个顶点是敌人。通过观察三人组的关系，可以理解不同组合下平衡的概念：

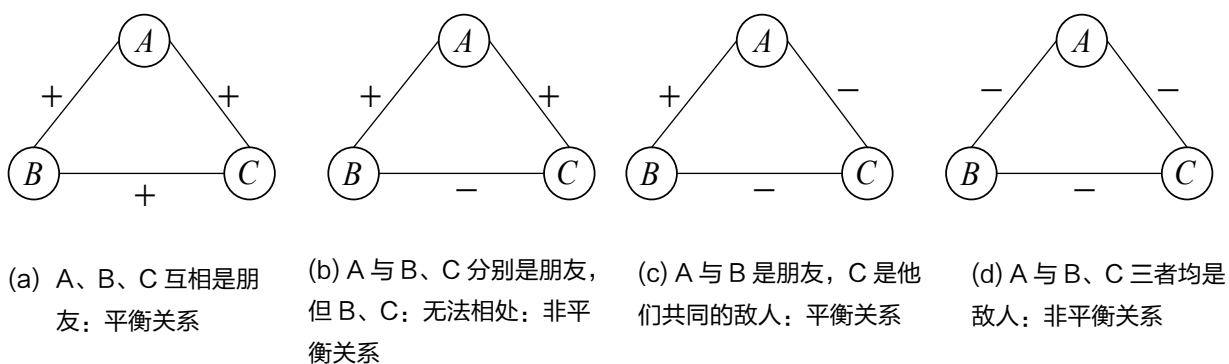
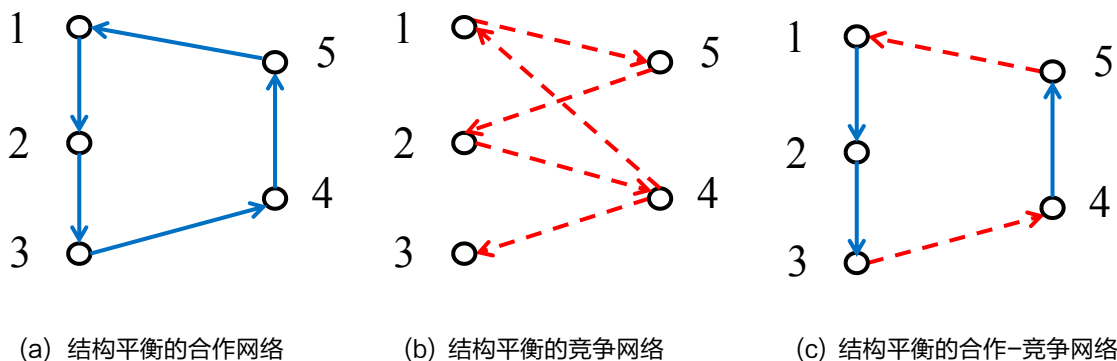


图 3. 三角关系的平衡性

通过观察图 3，我们称一个或者三个“+”形成的三角关系为平衡关系，而零个或两个“+”形成的三角关系称为不平衡关系。这样，三角关系的结构平衡主要有两种情况：1) 对于每三个节点，与它们相关联的三条边要么全部为“+”；2) 恰有一条边为“+”。而不平衡情况则包括：1) 对于每三个节点，与它们相关联的三条边一条“+”都没有；2) 对于每三个节点，与它们相关联的三边中有两条边为“+”。针对完全图，我们给出结构平衡的定义：如果每一个三角形都是平衡的，那么这个完全图是平衡的。

为了给出一般符号图的结构平衡定义，我们首先介绍一下正负环的概念。在符号图中，一个环就是起始点和终点是同一个顶点的一段路径。一个环可能既包含正边，又包含负边。若环中所有边的权重 a_{ij} 的乘积是正的，我们称该环是正的；否则为负的。如果一个符号图 G 中所有的环都是正的，则称 G 是结构平衡的；若 G 中至少存在一个环是负的，我们则称 G 是结构不平衡的。若 G 没有环，则称 G 是空平衡的^[9,10]。图 4 给出了不同的平衡结构^[9]，其中，(a)(b)(c)分别表示合作网络、竞争网络、合作-竞争网络的结构平衡图，(d)(e)分别表示竞争网络和合作-竞争网络的结构不平衡结构图，(f)表示空平衡竞争网络。



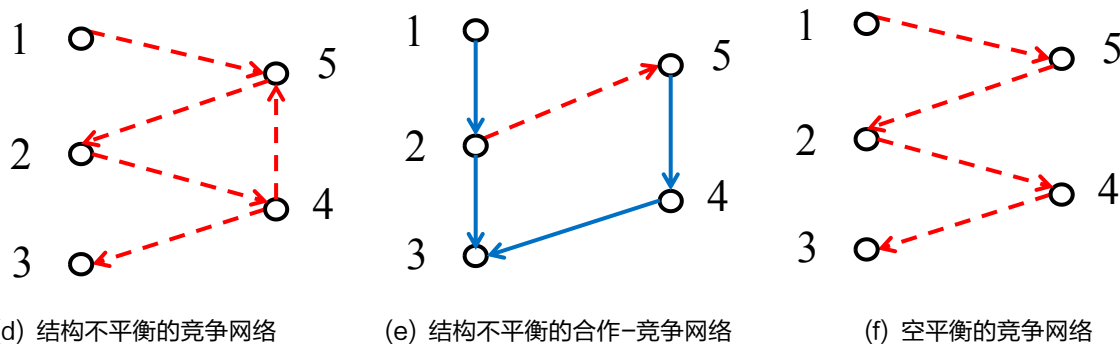
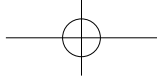


图 4. 符号图的结构平衡、结构不平衡、空平衡

2.2 结构平衡图的代数特性

结构平衡结构形成有两种基本方法：一种是所有顶点两两之间是朋友；另一种是网络顶点可以被分为两个组，其中，组内的顶点两两互为朋友，而组间的每个顶点都是敌人。从线性代数角度来讲，如果符号图是结构平衡的，则顶点集可以被划分为两个小组： $V_1 = \{1, \dots, N_0\}$ 和 $V_2 = \{N_0 + 1, \dots, N\}$ ，这时符号图的邻接矩阵可以表示为下面的矩阵形式：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中， $A_{11} \in \mathbb{R}^{N_0 \times N_0}$ 和 $A_{22} \in \mathbb{R}^{(N-N_0) \times (N-N_0)}$ 为非负矩阵，而 A_{21} 和 A_{12} 是非正矩阵。

为了分析合作-竞争系统的群体行为演化，符号图的 Laplacian 矩阵发挥着重要作用。一个符号图的 Laplacian 矩阵可以如下定义：

$$L = D - A$$

其中， $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N)$ 表示图的度矩阵， $d_i = \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|$ ， $N_i = \{j \mid (i, j) \in E\}$ 是顶点 i 的邻居集合。

2.3 结构平衡性的判定

在 2.1 节中，我们给出了完全图情形下结构平衡图的判定方法，并在 2.2 节中给出了结构平衡图 Laplacian 矩阵的代数性质。而对于一般网络的平衡判定，需要一个更为具有普适性的方法。在此，我们介绍一种基于先宽搜索方法的平衡划分过程。

命题 一个符号图是平衡的，当且仅当它不包含有奇数个负关系的圈。

对于一般网络的结构平衡判定，我们试图达到这样的一个结果：将所有顶点分成两个集合 X 和 Y ，使得两个集合内部顶点间的边为正关系，横跨集合的边为负关系，这样的划分过程被称为平衡划分。现在我们描述这样一个寻求平衡划分的过程，这个过程分为两步：第一步，将图转变成一个仅有负关系边的简约形式；第二步，在这个简约图中求解这个问题。

第一步简约过程描述如下：只要两个顶点是由正关系边连接的，则他们在平衡划分中属于同一个集合 X 或 Y 。当仅考虑正关系边时，将这些连通分量看成一个个团点，如图 5 所示。我们称这些团点为超节点。每个超节点内部顶点都是由正关系边连接的。连接两个不同超节点的边是负关系。

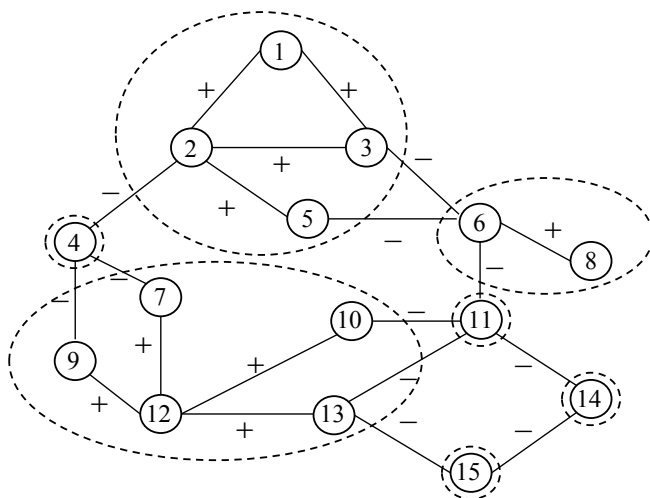


图 5. 符号图中的超节点

在简约过程中，往往需要面对以下两种情况：1) 若任何一个超节点内部包含一条连接顶点 A 和 B 的负关系边（如图 6 所示），则图中存在一个有奇数条负关系边的圈，该图是不平衡的。2) 若所有超节点内部均没有负关系边，则每个超节点属于集合 X 或 Y 。给这些超节点分类打上集合 X 或 Y 的标签，本质上忽略超节点内部的顶点，在团点的基础上构建了一个新图，如图 7 所示。

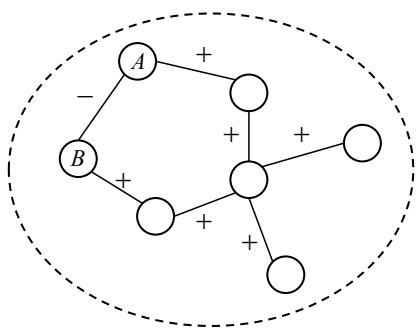


图 6. 一个超节点内由奇数条关系边组成的图

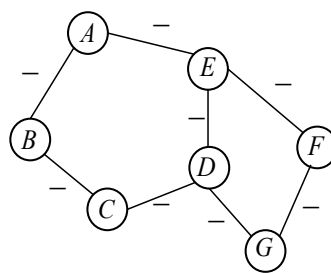
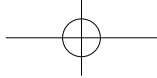


图 7. 一个更为标准的简约图，该图可以明显看出一个负关系的圈

第二步先宽搜索过程描述如下：先宽搜索（又称广度优先搜索）是一种盲目搜寻方法，该搜索方法广泛适用于任何图结构，需要按照分级方式，一级一级搜索。当访问过一级节点后，再根据与该级节点相邻却与之前顶点无重复的顶点建立新的级，以此类推。其要点是以某一顶点为出发点，优先访问所有



与之相邻的顶点。对于多数复杂的图而言，先宽搜索是一种计算节点间距离的有效方式。

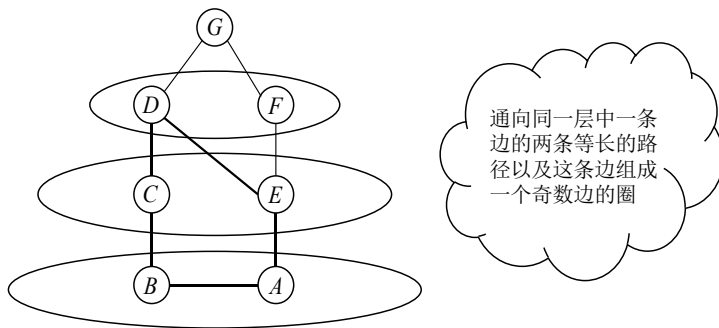


图 8. 先宽搜索过程简化图

取图 7 中的任意顶点作为根顶点，开始运用先宽搜索，那么由这个根顶点会产生一系列不同距离的顶点层。以 G 作为根顶点为例，图 8 给出了对于图 7 实施先宽搜索的过程。由于先宽搜索的边是无法跨越层次的，即每条边要么连接相邻层的两个顶点，要么连接同一层中的两个顶点。

概括起来：若简约图的所有边与先宽搜索相邻层的顶点相邻，将简约图的顶点按层次交替放入 X 和 Y ，相应地将原图的顶点也归于这两个集合，这种情况下，就得到一个平衡的顶点划分。否则，有一条边连接先宽搜索同一层的两个顶点，形成了图 7 中的含奇数条负边的圈。

3. 合作-竞争网络上的群体行为演化

为了方便描述合作-竞争网络上群体行为演化，我们假设合作-竞争网络中竞争关系和合作关系对应权重分别用负实数和正实数 a_{ij} 来表示， n 个个体的状态演化方程可以表示为：

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} [x_j(t) - \text{sgn}(a_{ij}) x_i(t)], i = 1, \dots, n$$

其中，符号函数 $\text{sign}(a_{ij})$ 等于 1 或 -1。上式可以写成以下等价形式：

$$\dot{x}(t) = -Lx(t)$$

其中， $x(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in R^n$ 是全部个体的状态向量。

当合作-竞争网络是图 4 (a) 的纯合作网络时，注意到，该合作网络含有一个生成树，此时，所有个体的状态极限满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - x_j(t)) = 0$ 。图 9 描述了群体在该网络上的状态演化过程。

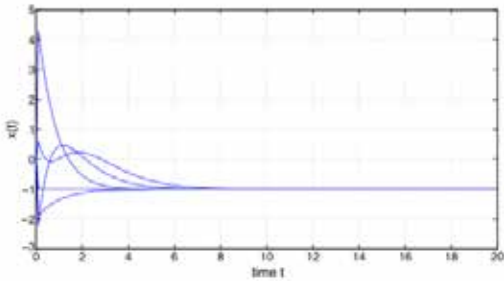


图 9. 合作网络上的群体一致性

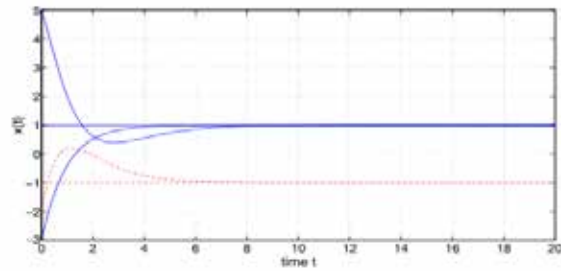


图 10. 结构平衡网络上的群体极化

当合作竞争网络是图 4 中的 (b)、(c) 或 (f) 时, 即网络是含有生成树的空平衡或结构平衡图时, 此时, 最终所有个体的状态呈现出一种二部一致性或极化状态, 状态极限满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - \text{sign}(a_{ij})x_j(t)) = 0$ 。图 10 中, 七个个体最终出现两极分化, 形成了两个极限状态 1 和 -1。

当合作-竞争网络是结构不平衡网络时, 如图 4 中的 (d) 或 (e) 所示, 则群体最终出现了状态分裂, 即全部个体的状态收敛到两个以上的极限状态。图 11 描述了结构不平衡网络上群体状态演化, 此时, 三个极限状态分别为 1、0 和 -1。

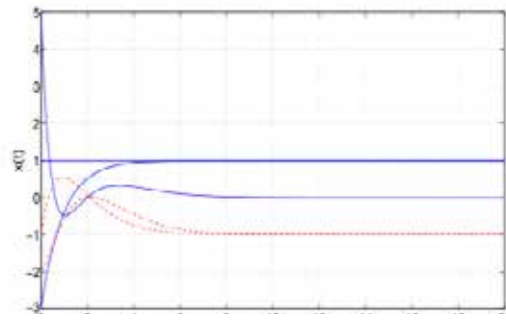
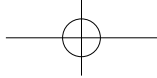


图 11. 结构不平衡网络上的群体分裂

4. 总结与展望

本文首先介绍了合作-竞争网络的基本概念, 并给出了基于符号图的建模。然后, 给出了符号图结构平衡性的定义和特性, 同时, 介绍了结构平衡图的 Laplacian 矩阵的代数性质。针对一般网络, 采用先宽搜索方法, 给出了一般符号网络的结构平衡判定方法。最后, 分析了合作-竞争网络中群体在不同网络结构平衡条件下的群体行为演化过程。

对于合作-竞争网络的研究还存在很多有意思的问题有待人们去研究与思考, 例如, 在同一时刻, 两个个体之间既有合作关系、又有竞争关系存在时, 如何对两者之间的合作与竞争关系强度进行描述? 另外, 合作-竞争网络上的动态演化博弈也是一个值得思考的问题。



参考文献

- [1] Brandenburger, Adam M, Nalebuff, Barry J. (1996). Co-opetition: a revolution mindset that combines competition and cooperation, Currency Doubleday, New York.
- [2] Alexander, R. D. (1974). The evolution of social behavior. *Annual Review of Ecology & Systematics*, 5(1): 165–189.
- [3] Grossberg, S. (1980). Biological competition: Decision rules, pattern formation, and oscillations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 77: 2338–2342.
- [4] Axelrod, R., Mitchell, W., Thomas, R. E., Bennett, D. S., Bruderer, E. (1995). Coalition formation in standard-setting alliances. *Management Science*, 41(9): 1493–1508.
- [5] Esley, D., Kleinberg, J., 李晓明等译 (2011). 网络、群体与市场: 揭示高度互联世界的行为原理与效应机制. 清华大学出版社.
- [6] Hu, J., Xiao, Z., Zhou, Y., Yu, J. (2013). Formation control over antagonistic networks, *Proc. of the 32nd Chinese Control Conference*, 6879–6884.
- [7] Hu, J., Wu, Y. (2017) Interventional bipartite consensus on cooperation networks with unknown dynamics, *Journal of the Franklin Institute*, 354: 4438–4456.
- [8] Altafini, C. (2013). Consensus problems on networks with antagonistic interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(4): 935–946.
- [9] Hu, J., Zheng, W. X. (2014). Emergent collective behaviors on cooperation networks. *Physics Letters A*, 378(26–27): 1787–1796.
- [10] Harary, F. (1953). On the notion of balance of a signed graph. *Michigan Mathematical Journal*, 2(2): 143–146.