同侍相濡随记

宋健　中国工程院

科技同侪，同行知音，共处斯世，霜露同沾，时而相濡以沫，终或相忘于江湖。相谊何必曾相识。

旅美 30 多年的沈致远先生，是余素未谋面的科友。1929 年生于江苏溧阳，1959 年浙大毕业留校任教，1980 年旅美访学，在微波物理领域深耕细耘，屡有建树。1990 年辗转至杜邦研究院，任研究员，从事高温超导电子学研究，成就卓著。2003 年以资深院士（Dupont Fellow）退休，定居于特拉华河畔的威明顿市。1998 年在《文汇报 · 笔会》上见到他开辟的专栏“天趣园”发表系列科学散文，2017 年集文成书《科学是美丽的》、《科学是大众的》、《科学是求真的》等，由上海教育出版社出版。评品古今，月旦当代，数理化，文史哲，论题广阔，引述准确，不溢不讳，文锋犀利，生动活泼，可读性和启示性均佳，很受读者喜爱，畅销数年。《笔会》也曾刊发过不佞的拙文，引起沈致远的注意，还写过励评，遂成文友。2013 年 10 月收到他的长篇专著《统一场论新论——统计量子空间的粒子物理和宇宙学》，在《现代物理杂志》（Journal of Modern Physics, April 2013）上发表。耄耋之年敢于跨界闯入莽林，对他的宽宏视野和追寻科理的勇气和魄力不胜钦佩。

他的科学散文，字里行间透射着对祖国的关切和对故土的眷恋。代马依北风，飞鸟恋巢枝，祖上的炊烟始终在他心中萦绕。

2016 年 5 月收到沈来信，说他读一本书时发现一个求函数差分和的经验规律，邀请科友们提供普遍性证实或证伪。这碰上了不佞的敏感神经，这是控制论中离散系统研究工具箱中的家具所擅。一周后我抄送他一个更广泛的讨论，互濡纾疑之意。不久，他回复曰：数位数学家朋友看后都纷纷称是。辛丑春节前惊见邮布，沈君不堪新冠病毒恶袭，不幸于 2020 年 12 月西去。不胜惆怅。抄记昔鱼雁一札，以念往昔科友之愫。

关于《自然数幂次阶差猜想》复沈致远信

致远兄鉴：

你的猜想很有趣。5 月 22 日发来的“扩大猜想”,似仍可用我 5 月 23 日寄你的框架解决，只要稍改定义即可。前信中个别符号抄错，现在重述如下：

设 $f(x)$ 为 n 次连续可微函数。定义 E 为移位算子，任选定 $x=x_0$， $Ef(x_0)=f(x_0+h)$, h

是任意正数（不必整数），$E^k f(x_0)=f(x_0+kh)$。记 Δ 为求差算子，$\Delta=E-1$,

$\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)$, $\Delta^k f(x_0)=(E-1)^k f(x_0)$. 易见下面两式成立:

$$\Delta^n f(x_0)=(E-1)^n f(x_0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_k^n f(x_0+kh)\,, \tag{1}$$

$$f(x_0+nf)=(1+\Delta)^n f(x_0)=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\Delta^k f(x_0), \quad C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2}$$

再定义

$$F_1(x_0,\ x_0+h)=\frac{\Delta f(x_0)}{1\cdot h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{1\cdot h},$$

$$F_2(x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h)=\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}=\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{2!h^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n(x_0,\ x_0+h,\ \cdots,\ x_0+nh)=\frac{\Delta^{n-1}f(x_0+h)-\Delta^{n-1}f(x_0)}{n!h^n}=\frac{1}{n!h^n}\Delta^n f(x_0). \tag{3}$$

定理 1（Gelfond A.O., 1952; Krilov V.I., 1959）设 $f(x)$ n 阶连续可微，(3) 式确定的 F_n 有下列积分表达式:

$$F_n(x_0,x_0+h,\cdots,x_0+nh)=\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}f^{(n)}(x_0+h\sum_{k=1}^{n}t_k)dt_n\,,$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n f(x)}{dx^n}; \tag{4}$$

式内 $1\ge t_1\ge t_2\ge\cdots\ge t_n\ge 0$, $\sum_k t_k\le 1$, 是 R^n 空间的截锥。

此定理易用归纳法证明。对 F_1 显然成立。易察，若对 $(n-1)$ 定理成立，对 n 亦然。

定理 2 （Lagrange 中值定理，1787）设 $f(x)$ 为 n 次连续可微，则必存在某内点 $\xi\in(x_0,\ x_0+nh)$ 使

（4）式可写成 $F_n = V_n f^{(n)}(\xi)$, $V_n = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n = \dfrac{1}{n!}$ 为（4）式积分域的体积，故有:

$$F_n = \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f(x_0) = V_n f^{(n)}(\xi),\ 即\ \Delta^n f(x_0) = h^n f^{(n)}(\xi). \tag{5}$$

推理 3 设 $f(x) = \mathrm{P}(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p$ 为常系数 p 次多项式。据(5)式，若 $n = p$, $h = m$，则必有 $\Delta^p \mathrm{P}(x) = a_0 m^p p!$ 。因 $f^{(p)}(x) = a_0$ 为常数，故当 $a_0 = 1$ 时正是你猜想的 $D_{p,p}(N,M) = p!M^p$ 。更有，当 $n > p$ 时 $\Delta^n f(x_0) = \Delta^n \mathrm{P}(x_0) \equiv 0$, 即 $D_{p,n}(N,M) = 0$ 。实际上对任意正数 M 此推理都成立。

请看，上述答案成理否?

顺致

敬礼

宋健 2016 年 5 月 30 日

附：沈致远来信，后发表于《前沿科学》杂志 2016 年第 2 期。缩抄如下:

自然数幂次阶差猜想

沈致远

作者在一本书里偶然发现一个表格（见表 1）[1]，列出自然数平方差之间的一种规律。

表 1

自然数 N	N 平方	1 阶差	2 阶差
1	1		
2	4	3	
3	9	5	2
4	16	7	2
5	25	9	2
6	36	11	2
7	49	13	2
8	64	15	2
9	81	17	2
10	100	19	2
11	121	21	2
12	144	23	2

表中的结果引起了作者的兴趣，将之推广得到一般规律，作为一个猜想提出来，希望引起数学家注意，设法予以证明成为定理。

一般规律

设: N为自然数, M为两自然数$N+M$与N之差, P为自然数$N+M$与N之幂次。自然数幂次阶差定义:

$$D_{p,1}(N,M)=(N+M)^p-N^p,\qquad N,M,p=1,2,\cdots,\infty, \tag{1.1}$$

$$D_{p,i}(N,M)=D_{p,i-1}(N+M)-D_{p,i-1}(N),\quad N,M,p=1,2,\cdots,\infty,i=2,3,\cdots,p. \tag{1.2}$$

作者发现各阶自然数幂次差之间具有规律性。

对$M=1$之特例：$D_{p,p}(N,1)=p!\times 1^p=p!$

从以上计算可以看出，自然数幂次差之间具有规律性，为提出猜想提供根据。

自然数幂次阶差猜想

按照（1）式定义及计算结果，作者提出下列猜想。

自然数幂次阶差猜想:

$$D_{P;P}\left(N;\ M\right)=P!\times M^P,\ \ N=1,2\ldots\infty\ ,M=1,2\ldots\infty,\ \ P=1,2\ldots\infty. \tag{2}$$

（2）式非常简洁，其适用范围极其广泛，值得引起注意。

结论

1．作者从参考资料[1]之表 1 得到启发将之推广，发现了“自然数幂次阶差猜想”。是否已有前人发现过？作者就此问题请教过几位数学家，均未得到肯定的答复。为进一步核实，现将此文发表，以便更广泛地征求意见，如确实未有前人发现过，作者在此提出“自然数幂次阶差猜想”。

2．猜想需要证明才能成为定理。作者并非数学家，无力进行证明。希望此文发表后能引起数学家对“自然数幂次阶差猜想”的兴趣，设法予以证明。

致谢

作者感谢宋健院士、谈祥柏教授、潘承毅教授及靳蕃教授的鼓励和帮助。

参考文献

[1] B. Woolley, The Bride of Science, McGraw−Hill, 1999, p.153.