数学力学奠基人阿契塔

张伟伟　太原科技大学

与柏拉图同时代的阿契塔，在许多资料中被称为数学力学奠基人，不过在力学相关的资料中却很少被人提及。本文梳理了阿契塔的主要学术关系以及他的主要学术贡献，形成对阿契塔的基本认识，并以此为基础探讨了力学在服务人类科技进程中的角色。

维基百科、百度百科的相关条目中，都将古希腊时期生活于塔伦通（Tarentum，现意大利塔兰托Taranto）的阿契塔（Archytas，公元前428年—前350年[1]）称为数学力学奠基人。然而，在现有力学体系中，几乎找不到有哪些理论或应用研究是阿契塔创立的。即便是古希腊、罗马时期的力学家，如菲隆（Philon，约公元前300年—不详）、阿基米德（Archimedes，约公元前287年—前212年）、希罗（Hero，约公元前10—前70年）、帕普斯（Pappus，3—4世纪）等人，也很少提及阿契塔的工作。这是一个令人迷惑的问题，阿契塔究竟做出了哪些力学贡献而被称为数学力学奠基人？本文首先梳理阿契塔的学术关系，以此形成对阿契塔的基本认识，然后介绍阿契塔在数学力学方面的贡献，并由此探讨力学在人类科技文明进程中所扮演的角色，探讨力学研究与力学教育的社会价值与意义。

1. 阿契塔是谁?

阿契塔被认为是古希腊著名的毕达哥拉斯学派的最后一位领袖[2]，同时他还是塔伦通的政治、军事领导人。据说他设计过一种可以飞行的

机械鸽，系统研究了Superparticular比例与音阶之间的关系，巧妙地利用空间几何解决了倍立方体问题，他还连续7次当选为塔伦通的最高领导人（这是法律明文禁止的，这说明他在塔伦通的声望很高）。许多介绍阿契塔的资料都会提到他与柏拉图（Plato，公元前427年—前347年）之间的友谊。公元前361年，柏拉图游历西西里岛时，被锡拉库扎的暴君扣押后，曾写信向阿契塔求助，阿契塔利用他军事领导人的身份组织营救了柏拉图。阿契塔的详细生卒年份已不可考，Huffman[3]根据各种史料推测，阿契塔出生年份介于公元前435年—前410年之间，死于公元前360年—前350年之间。

在学术上，阿契塔继承了古希腊毕达哥拉斯学派的“数本说”思想，认为世界的一切都可以由“数”来描述，并由“数”主宰[4]。阿契塔的老师菲洛劳斯（Philolaus，约公元前470年—前385年）是第一个向公众宣扬毕达哥拉斯哲学思想的学者。他继承了“和谐之声”背后的简单“比例说”，利用几何图形来对应元素说解释数本说。例如，他用四面体指代火，八面体指代空气，二十面体指代水，立方体指代土，十二面体指代第五种元素“以太”。菲洛劳斯还提出了地球并非固定在宇宙中心，而是围绕宇宙中心的一团火运动的观点，但他认为宇宙中心的火不是太阳，太阳和地球一样，一起围绕宇宙中心的火在运动。到公元前二三世纪，萨摩斯的阿里斯塔克（Aristarchus of Samos，约公元前310年—前230年）在菲洛劳斯 “中心火团”观点的影响下提出了“太阳中心模型”，认为太阳是宇宙中心，行星围绕太阳运动[5]，这是最早的日心说观点。

阿契塔只有一个学生叫欧多克索斯（Eudoxus of Cnidus，公元前408年—前355年），欧多克索斯主要和阿契塔学习几何学、数论和音乐理论[6]。此外，欧多克索斯也积极向当时其他知名哲学家学习，如柏拉图。由于经济条件较差，住的地方离柏拉图讲学的地方较远，为了听柏拉图的演讲，欧多克索斯连续好几个月每天徒步22公里往返于自己的住所与柏拉图的演讲地。后来朋友资助他到埃及学习天文学，从埃及回来时他招收了很多学生，大概公元前367年亚里士多德也曾向他学习过。欧多克索斯的主要贡献在于首先引入“量”的概念，将“量”和“数”区分开来。其次，欧多克索斯还建立了严谨的穷举法，并利用穷举法证明了两个圆的面积之比等于其半径的平方之比，两个球的体积之比是它们的半径的立方之比，以及圆锥、棱锥的体积分别是等底等高的圆柱、棱柱体积的1/3。倍立方体是阿契塔最突出的贡献，沿着这条路径，欧多克索斯的学生，门奈赫莫斯（Menaechmus, 约公元前380年—前320年）系统研究了圆锥曲线，得到了抛物线和双曲线的性质。

另一方面，既然柏拉图是阿契塔的好友，那么他们很可能一起讨论过几何、哲学、音乐等共同关心的问题。但同时柏拉图也对阿契塔进行了激烈的批评，如批评阿契塔在研究中专注于实用技艺，而缺乏理性思考；批评他的几何学不与天文学结合而与工程结合；关于宇宙有限和无限他们也有争论（柏拉图认为宇宙有限）。柏拉图甚至说，是由于阿契塔所拥有的军事、政治身份让他在哲学上分心，并批评他在哲学上的理解能力拙劣等等。尽管如此，阿契塔还是深深地影响了柏拉图以及他的学生。亚里士多德的著作中有三卷讨论了阿契塔的哲学[3]。此外，亚里斯多德的学生欧德莫斯（Eudemus，约公元前350年—前290年）着重讨论了阿契塔有关几何和物理学的工作。他著有《几何史》，是欧几里得之前重要的几何方面的著作[7]。亚里士多德另一位学生亚

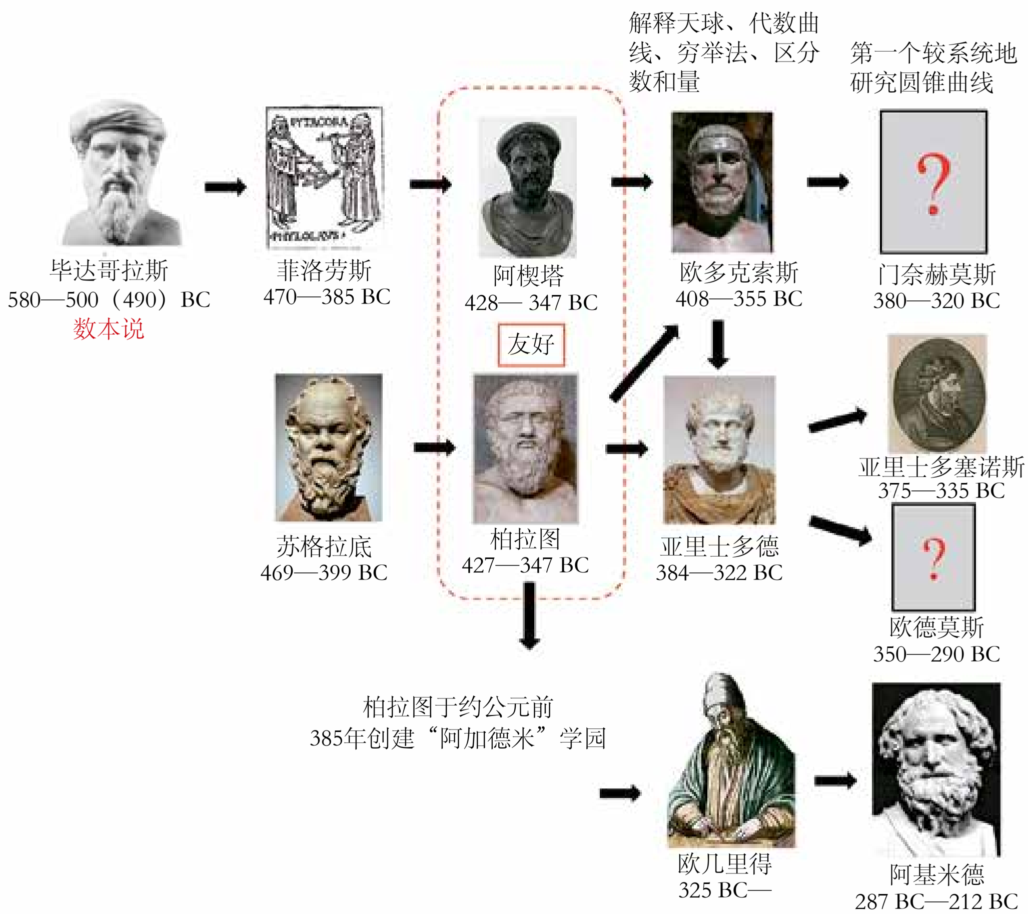

图1 阿契塔的主要学术关系

里士多塞诺斯（Aristoxenus，约公元前 375年—前335年）撰写了阿契塔传记，这成为研究阿契塔的重要资料。亚里士多塞诺斯也出生和生活在塔伦通，年代正是阿契塔在这里掌权的巅峰时期，他有比较详实的资料。

柏拉图的一大贡献是创立了“阿加德米学园”，阿加德米是Academy（学院）的音译。这一学院大约公元前385年创建，一直延续到公元529年被东罗马帝国查士丁尼大帝关闭为止，有900多年的历史。欧几里得曾就学于阿加德米学园，并写出了《几何原本》，其中也引用了阿契塔有关Superparticular比例的研究。除《几何原本》之外，欧几里得还写过一本有关音乐的书Sectio Canonis，共包括一个引言和二十个关于音乐理论的命题，每个命题都有一个证明和解答[8]。被誉为“力学之父”的阿基米德（Archimedes，约公元前287年—前212年）曾向欧几里得学习。在这错综复杂的关系中，阿加德米学园可能有保留了一些阿契塔的思想，这样，阿契塔的学术思想有可能间接影响到阿基米德。图1所示为阿契塔主要学术

关系图，图中箭头方向表示师生传承方向，从该图中也大致可以看出阿契塔的历史地位。

2. 阿契塔的主要贡献

2.1 机械鸽

很多资料提到阿契塔发明了一种蒸汽动力的自动飞行器，因其设计为鸽子形状，被称为机械鸽，也被认为是人类发明的第一个机器人（见图2）。有人因此将阿契塔视为机械和力学的奠基人。可惜的是由于年代久远，阿契塔飞行器的技术细节已经无法考证，人们只能通过残存的一些资料进行推测。大部分资料提到的细节包括：木制、鸽形、蒸汽动力，飞行200米左右[9]。

旨在陈列古希腊技术的Kotsanas博物馆复原阿契塔的机械鸽[11]，用一个空心圆柱体做它的身体，加上翅膀和尾翼，头部较尖，整个结构形状符合空气动力学以获得最大的飞行距离和飞行速度，如图3所示。

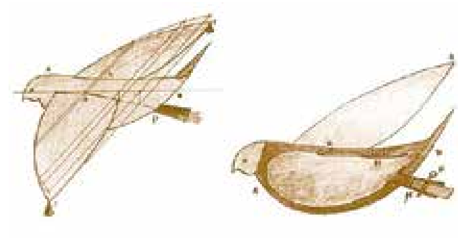

图2 阿契塔飞鸽想象图[10]

图3 阿契塔飞行器[11]

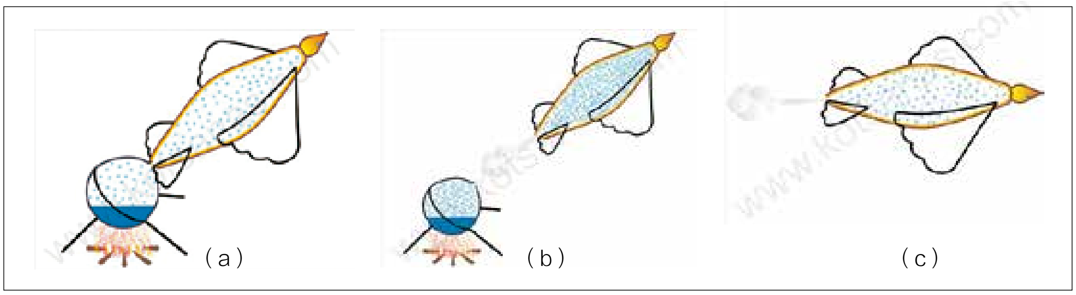

图4 机械鸽发射过程想象图[11]

机械鸽的动力部分由尾部连接的密闭容器提供（图3中的金属部分），圆柱体的内腔与该密闭容器通过管子连接，当密闭容器中装水后加热产生蒸汽，并通过连接管子进入机械鸽“体内”，当蒸汽越来越多时，机械鸽体内压力增加，超过连接处连接阻力时，机械鸽与密闭容器脱离，飞向天空。大概过程参见图4(a)~图4(c)。

该复原把阿契塔的机械鸽设想成了一种符合空气动力学外形的自助动力起飞、可滑行的飞行装置。但Huffman[3]考证认为阿契塔机械鸽有不同的形式，说机械鸽借助于滑轮和平衡物，通过空气膨胀可以从杆的下方“飞”到一个较高的位置。联想阿契塔军事领袖的身份，以及古希腊人们通常以乌龟、雄鸡等动物命名攻城工具，因此他猜想阿契塔机械鸽可能是他发明的自动抛石机，或者是抛射物本身（可借助

蒸汽飞行得更远）。

2.2 音乐理论

在人类历史上，弦乐器是发展较早的乐器，音高实际上是发声体振动频率的反映。1759年，拉格朗日经过研究得出弦长与频率的关系为:

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho A}} \tag{1}$$

式中，n 表示阶数，l 表示弦长，T 表示张力，ρ 表示材料密度，A为弦横截面面积，ω_n为第n阶圆频率。而人们早在毕达哥拉斯时期，就确定出弦乐器音高与弦长的一些关系，如弦长为1:2时为八度音（频率比为2:1），弦长之比为4:3时为四度音（频率之比为3:4），3:2时为五度音（频率为2:3），并提出了五度相生律。菲洛劳斯将毕达哥拉斯的比例说进行了推广[12]，他指出一个八度音可以由一个四度音和一个五度音组成，即

$$2:1=(4:3)(3:2) \tag{2}$$

五度音（频率比为3:2）是由1个四度音（频率比为4:3）再加1个全音组成，这样如果设全音的频率比为x，就可以写出方程

$$3:2=(4:3)x \tag{3}$$

解出x，得出全因的频率比为8:9。而四度音（频率比为4:3）是2个全音和1个半音组成，此时设半音的频率比为y，写出方程

$$(4:3)=(9:8)(9:8)y \tag{4}$$

解出y，得到频率比为256:243。但是菲洛劳斯认为这是一个令人讨厌的比例，因为毕达哥拉斯说“比率越简单的音听上去越和谐”，这显然不是一个简单的比例。虽有不满，菲洛劳斯仍然将七声音阶的弦长之比设为9:8，9:8，256:243，9:8，9:8，9:8，256:243。阿契塔则不同，不满意就改，构建了新的音乐体系。

首先，阿契塔从菲洛劳斯的八度音比例2:1，五度音比例3:2，四度音比例4:3，全音比例9:8出发，感觉到在音乐中比例$(n+1):n$是一个非常重要的比例，并将其称为Superparticular 比例。按照毕达哥拉斯的建议，八度音的比例是2:1，那么，八度音的中间音的比例应该是2:1的比例中项，但是没有整数可以成为2:1的比例中项。不仅八度音没有，包括五度音的3:2，四度音的4:3，以及全音的9:8之间，都没有整数比例中项，阿契塔用严格的数学证明出Superparticular比例没有比例中项（指整数解）。阿契塔将数学严格性引入毕达哥拉斯和声理论中，这一证明后来被欧几里得做了微小修正后用在Sectio Canonis中[8]。数学中Superparticular比例找不到整数的比例中项，本质上反映了仅依靠整数比例不能分辩出半音间隔。

其次， 阿契塔提出了新的四声音阶。古希腊有多种音阶形式，其主要特征表现在四声音阶的不同。毕达哥拉斯和菲洛劳斯的音阶结构中，四声音阶（音阶中唱名为do，re，mi，fa四个音）的比例关系为：9:8（全音），9:8（全音），256:243（半音）。而阿契塔则使用了不同的四声音阶：9:8，8:7和28:27。这就修改了菲洛劳斯半音为“复杂比例”256:243的“不和谐”，使用统一的Superparticular比例构造音阶。此外，阿契塔还提出了一种小半音四度音阶(nharmonic Tetrachord)，比例关系为5:4，36:35 和28:27[3]，依然是采用Superparticular比例构造。用严格的、特定的比例去构建音阶，这种做法体现了毕达哥拉斯学派的传统。

但这种不遵守音乐传统的做法，直接引起了柏拉图的不满。虽然柏拉图对阿契塔的音阶理论不满意，但他对阿契塔关于声音传播的一般理论比较认可。阿契塔认为鼓锤敲击大鼓，敲击速度快，其传播速度也快，可以产生较高的音，敲

击速度慢，其传播速度也慢，产生较低的音。因此，阿契塔认为音高的本质与声音的传播速度相关。现在我们知道声音在空气中的传播速度是固定的，音高依赖于声音的频率，发声体振动频率高音就高。可想而知，在没有频率这一概念时，阿契塔混淆振动频率与传播速度也就不足为奇了。尽管阿契塔对音高的解释是错的，但他的这一理论被柏拉图和亚里斯多德采用，在古代声学理论体系中占据着重要的支配地位[3]。

2.3 倍立方体

公元前3世纪希腊天文学家、数学家、地理学之父埃拉托色尼（Eratosthenes of Cyrene，约公元前276年—前195或194年）在Platonicus中记录到希腊提洛斯岛（Delos，传说是太阳神阿波罗的出生地）发生了一次瘟疫，当居民向阿波罗祈祷时，神谕说：“他们需要把正方体的祭坛加到两倍，瘟疫才能停止”。这可难坏了工匠，因为把祭坛的边长变成原来的2倍，则体积将是原来的8倍；再做一个等大的正方形虽可以体积翻倍，却最终将不再是正方体。如今我们知道，只要把边长变为原长的$\sqrt[3]{2}$倍就可以。可是，当时希腊还不懂开立方，并且该问题被限定在尺规作图法内完成。这个问题太难了，当提洛斯岛的居民去请教当时最著名的柏拉图，柏拉图也一筹莫展，只好说：神并不是让大家真正做一个两倍的祭坛，只是因为希腊人过于忽视数学和几何的作用，以此神要大家重视数学和几何[13]。这就是著名的倍立方体难题，它与化圆为方、三等分角一起构成了古希腊三大几何难题。阿契塔利用空间几何的方法给出了倍立方体的第一个解，是所有方法中最为独特的一种方法。

解决倍立方体问题迈出第一步的是古希腊数学家希波克拉底（Hippocrates of Chios，约公元前470—前410年。和提出希波克拉底宣言的不是同一个人）。数学家希波克拉底将倍立方体问题做了一点变动，他提出寻找两条线段长度的两个比例中项，他这样提问[14]：

假设a, b代表两个量，并且$a{:}b=1{:}2$ ，当x, y是a, b的两个比例中项时，即

$$a{:}x=x{:}y=y{:}b \qquad (5)$$

则x就是翻倍后立方体的边长。证明如下：三个比值相乘$(a{:}x)\ (x{:}y)\ (y{:}b)=a{:}b$；并且$(x{:}y)$ 和$(y{:}b)$ 均等于$(a{:}x)$ ，所以，三个比相乘有$(a{:}x)^3=a^3{:}x^3$，即

$$a^3{:}\ x^3=a{:}b \qquad (6)$$

求解式(6)，得$x=\sqrt[3]{2}a$，这说明当a为原立方体边长时，x就是新立方体的边长。此后希波克拉底就努力用尺规作图法去寻找a, b的两个比例中项。阿契塔最终解决了倍立方体问题。为了便于说明，我们引入坐标系，如图5和图6所示，按照先平面再空间的过程解释阿契塔的求解方法。

如图5所示，在xAy平面内作一个直径为AD的圆，做弦AB，这里AB=a，AD=b。目标是寻找a,b之间的两个比例中项。过D点做圆ABD的切线与AB的延长线交于P。然后，转到A-xyz 空间中，考虑以下几个步骤：

(1) 以半圆ABD为底，沿着Az轴拉伸，生成半圆柱体的表面。参见图6。

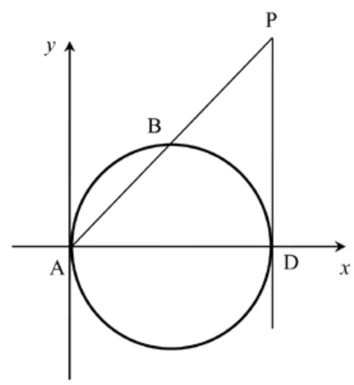

图5 求解倍立方体问题底面图

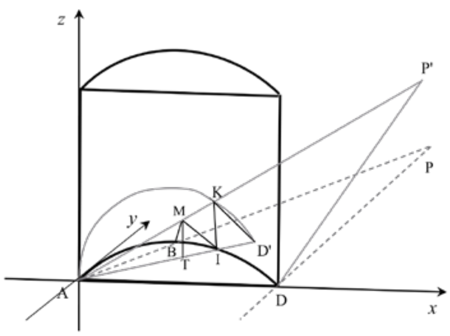

图6 倍立方体问题立体作图

(2) 将△APD绕AD轴旋转，形成圆锥面， P到达P'点，B到达M点。此时AB=AM。第1步中的半圆柱面与第2步产生的圆锥面相交于交线L。

(3) 假想一个以AD为直径、垂直于xy平面的半圆，绕Az轴旋转，直至半圆弧AKD'与前两步产生的交线L相交于K点。此时有AD=AD' 。

(4) 交底圆于I，连接KI，则有KI垂直于底面，也就垂直于AD'。再过M作底面的垂线交AD'于T；再连接MI。这样，就可以把问题转到Rt△AKD'中去讨论，参见图7。

(5) 找出相似三角形，有Rt△AMI 相似于Rt△AIK ，又相似于Rt△AKD' 中，可以得到 AM:AI=AI:AK=AK:AD' 。又由于AM=AB，AD'=AD。因此AI和AK就是线段AB和AD之间的两个比例中项。求解完毕。

此后，许多数学家都对倍立方体进行了研究。古希腊数学家欧托西奥斯（Eutocius of Ascalon，约公元480年—540年）搜集了倍立方体问题的11种求解方法[3]。阿契塔的求解方法在空间构造比例中项，开创了立体几何；他的学生欧多克索斯将阿契塔的空间结构投影到平面得到了平面上的解，区分了“数”和“量”，确立了比例论；而欧多克索斯的学生门奈赫莫斯继续研究倍立方体，又开创了圆锥曲线的研究。门奈赫莫斯注意到希波克拉底的连比a:x=x:y=y:b ，前一个等号可导出

$$x^2=ay \tag{7}$$

后一个等号可导出

$$y^2=bx \tag{8}$$

这两个方程表示抛物线。第1个比等于第3个比导出

$$xy=ab \tag{9}$$

这是双曲线。如图8所示，将三条曲线绘在同一个坐标系下，三条曲线必相交于一点P，选择式(7)~(9)中任意两个，联列方程，求出P点的x坐标，就得到了倍立方体问题的解。

设过P点作x轴的垂线交x轴于N点，过P点做y轴的垂线交y轴于M点，连接MN。过M点作MN的垂线，交x轴于B点，过N点作MN的垂线交y轴于A点。根据相似三角形，可以推出OA:ON=ON:OM=OM:OB。设OA=a，OB=b时，ON=x，OM=y，当a:b=1:2时，ON即为倍立方体的新边长。这一方法很容易制作出计算倍立方体的工具。只需要两把直尺和一个十字架，如图9所示。设定好OA和OB的比例（即体积比），ON的长就是要求解边长的长度。虽然倍立方体问题最初是希望将体积翻2倍，但利用该方法任意倍体积都可以计算，只需要将a:b设置为相应的比例即可。这一方法在工业制造中非常有用，古代建筑或机械工程中可能没有设计图纸，但可能会先做一个模

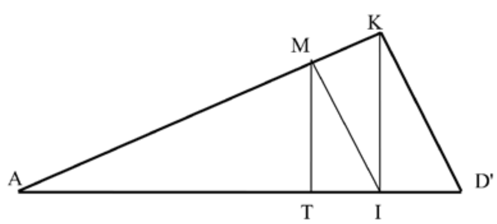

图7 在直角三角形中找两个比例中项

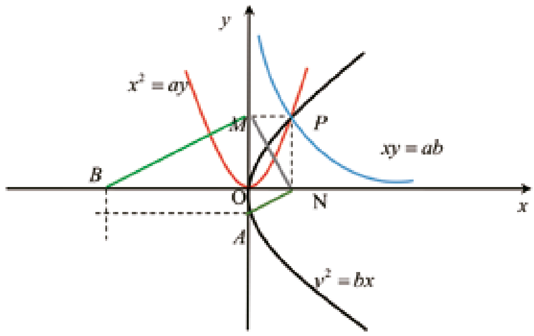

图8 倍立方体问题的门奈赫莫斯解法

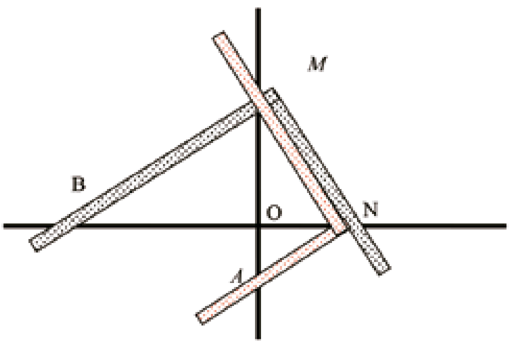

图9 用直尺确定倍立方体的解

型，然后利用该比例换算就可以方便地进行实体结构的放大或缩小。

2.4 阿契塔的其他贡献

除了上面提到的机械鸽、音乐理论、倍立方体以外，阿契塔在科学分类、光学、宇宙观等方面也提出了自己独特的观点。如阿契塔确立了四门学科：天文学，几何学，算术和音乐[15]。这直接影响了中世纪欧洲学校中的“四艺”，另外加上逻辑、语法、修辞成为“七艺”。在逻辑学方面，阿契塔认为“逻辑似乎远远优胜于其他关于智慧的科学”（Logistic seems to be far superior indeed to the other arts in regard to wisdom.）。这是在强调思考方式（即处理问题的方法）远比获得的知识更加重要。在光学方面，阿契塔支持“视力射线说”，认为眼睛本身会发射某种射线，当射线照射到其他物体上人就看到了物体。在运动学方面，阿契塔认为是运动造成了不平等和不均衡，而不是由于不平等或者不均衡才引起了运动。在对宇宙的认识上，阿契塔支持宇宙无限论，为了反驳宇宙有限论，他说假如有一个达到了宇宙边界的人，他一定可以把手或者手杖再伸向边界的外面[3]。作为毕达哥拉斯学派的传承人，阿契塔坚信世界由数和比例决定。在政治关系和个体道德行为上，阿契塔也强调数和比例的价值。如在分配机制上，他认为通过合理的比例计算，就会达到和谐。人们本质上并不会贪得无厌，追求平等才是与生俱来的。

3. 阿契塔的工作体现了力学的双重属性

一般认为，力学方面最早的研究大致可以追溯到亚里士多德，例如他讨论运动与力的关系，处理过一些简单的机械，如杠杆。此后，阿基米德提出杠杆原理，并设计出如弹石机、抽水机等战争机械，伽利略研究斜面上的小球运动等等[16]。据Huffman考证[3]，传记作家第欧根尼・拉尔修（Diogenes Laertius，大约生活于公元3世纪，专门写古希腊哲学家）称阿契塔是第一个通过数学第一原理使力学系统化的人，因此阿契塔有时被一些现代的学者称为力学科学的奠基人。但他并没有解释这一过程是如何实现的。而罗马时期的史学家普鲁塔克（Plutarchus，公元46年—120年）很可能是最早将阿契塔视为力学发展中的重要人物的人[3]，他记录了柏拉图批评阿契塔将几何与机械制造相结合，称这是手艺人的目标，而不是具有理性思考的哲学家的目标，批评阿契塔缺乏对哲学的理解能力，还批评他破坏了几何学的真正价值。我们知道，柏拉图推崇理性主义，他认为世

界有两个，一个是可以观察的感性世界，另一个是需要通过理性思考后才能到达的理性世界。两个世界相互对立，并且理性世界高于感性世界，阿契塔关注实际工程（如机械制造，以及倍立方体解决模型缩放）显然不符合柏拉图对理性世界的追求。然而，阿契塔的身份决定了他不能只专注理性思考，他还需要讲求实用。作为塔伦通的政治、军事领导人，要在战争中取胜，就离不开“机械”，这种实用视角促成了阿契塔将数学应用于力学。这也体现出阿契塔的两面性：一方面他继承了毕达哥拉斯学派的“数本说”思想，是理性思考者，另一方面，阿契塔作为军事领导人又必然是实用主义者，要在战争中获胜，就必须解决实际工程问题。

阿契塔的双重性，正好反映了力学的双重性。周培源先生说[17]：自古以来，力学研究就有基础研究和应用研究两条途径。并介绍了牛顿也认为古人用两种方法演述力学，其一是纯理的，用论证精确地推进，其一是实用的；马克思把力学称为“大工业的真正科学的基础”，恩格斯把力学称为“最基本的自然科学”。钱学森把力学看作是技术科学，而技术科学即是自然科学和工程技术的综合[18]。这些都说明了力学具有基础科学与应用科学的双重属性，力学是连接基础理论体系和工程技术应用的桥梁和纽带。当理论发展超前于技术水平时，力学要努力促成理论向技术的转变，从这个角度看力学更侧重于应用研究，而当技术超前于理论发展时，力学又要尽可能完善相应的理论，以促成更大的工程应用。阿契塔在古希腊时期就早已奠定了力学这种双重属性的基础。

参考文献

[1] Archytas of Tarentum. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Archytas.html

[2] 王志庆. 古希腊早期数学观之研究[D]. 兰州大学, 2009.

[3] Huffman, Carl, "Archytas", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/archytas/.

[4] 林夏水. 毕达哥拉斯学派的数本说[J]. 自然辩证法研究, 1989, (6): 48–58.

[5] New world encyclopedia. Philolaus. http://www.newworldencyclopedia.org/entry/Philolaus

[6] Eudoxus of Cnidus.http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Eudoxus.html

[7] Eudemus of Rhodes. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Eudemus.html

[8] 胡彭. 音乐理论的起源:毕达哥拉斯学派的理论(上)[J]. 音乐艺术(上海音乐学院学报), 2009, (3): 75–80.

[9] Wikipedia. Archytas. https://en.wikipedia.org/wiki/Archytas

[10] The steam-powered pigeon of Archytas-the flying machine of antiquity. http://www.ancient-origins.net/ancient-technology/steam-powered-pigeon-archytas-flying-machine-antiquity-002179?nopaging=1

[11] The flight machines of the ancient Greeks. http://kotsanas.com/gb/exh.php?exhibit=2001001
[12] Philolaus. http://www.crystalinks.com/philolaus.html
[13] Doubling the cube. http://www–history.mcs.st–and.ac.uk/HistTopics/Doubling_the_cube.html
[14] Wikipedia. Hippocrates of Chios. https://en.wikipedia.org/wiki/Hippocrates_of_Chios
[15] [美]卡尔.B.博耶（著）. 秦传安(译).数学史. 中央编译出版社. 2012
[16] 武际可. 力学史（第2版）. 上海辞书出版社. 2010.7
[17] 周培源. 谈谈对力学的认识和几个关系问题[M]//刘俊丽, 刘日武[编]. 院士谈力学. 北京: 科学出版社. 2015, 3–5.
[18] 钱学森. 论技术科学[M]//刘俊丽, 刘日武[编]. 院士谈力学. 北京：科学出版社. 2015, 6–18.