# 泛维矩阵的数学理论

程代展　中国科学院数学与系统科学研究院

矩阵理论无论对自然科学还是数学本身，都是最重要的基本工具之一。矩阵的概念早已有之，它就诞生于我们的祖国。在Katz的数学史一书中指出：“矩阵的概念有很长的历史，它至少可以追溯到汉朝，中国的学者为解线性方程组而引进了矩阵[1]。”而矩阵理论真正成为一个数学分支还主要是在19世纪，源于A. Cayley, J.J. Sylvester, G. Frobenius等人的工作。

虽然矩阵理论是一个非常有用的工具，但它仍有一些弱点。首先，从计算角度看，它不像数的运算那样具有一般性。主要区别在于(i) 矩阵乘法有维数限制；(ii) 矩阵乘法不可交换。其次，从应用角度看，矩阵（以及作为它特例的向量）在描述和研究一维或二维数组时十分有效。但是，如果讨论高维数组，矩阵方法并不方便。

因此，20世纪80年代，一些学者提出用“立体矩阵”来刻画三维数组。立体矩阵公式复杂，并且无法推广到更高维数组中去。还有如多边矩阵理论等，试图解决这些问题。虽然立体矩阵甚至多边矩阵都得到了一些应用，但其计算上的复杂性妨碍了它们的发展。

经过若干年的前期探索，矩阵半张量积理论于2001年被正式推出[2]。矩阵半张量积是矩阵普通乘积的一种推广，它可用于任意两个矩阵，因此突破了普通矩阵乘法的维数限制。它具有若干“交换”性质，在一定程度上克服了矩阵乘法的不可交换性。它可以方便地应用于多线性映射，从而使矩阵方法可以有效地处理高维数组。更为突出的一个优点是，所有的普通矩阵乘法的主要性质都被这种推广保留了下来。

正是由于矩阵半张量积的这些优点，它出现之后迅速得到广泛的应用。它最初主要应用于连续动态系统的建模、控制及其数值化实现，例如在电力系统安全稳定控制中的应用[3]。2008年以后，它被用于逻辑系统的分析与控制，得到很大成功，初步形成了较完整的逻辑系统的控制理论[4]。从2012年开始，它又被应用于有限博弈[5,6]，解决了博弈论中一些长期未决的难题，例如，势博弈的检验问题[7]，有限博弈空间的分解问题[8,9]等。

目前，矩阵半张量积已被运用到众多领域的研究中，包括(i)逻辑动态系统，(ii) 生物系统（基因调控网络），(iii) 图论与队型控制，(iv) 线路设计与故障检测，(v) 有限自动机与符号动力学，(vi) 密码学与编码，(vii) 模糊系统控制等。此外，它还被成功地应用于电力系统，混合动力机车等工程问题的设计中。更多的情况可参考一些国内、外学者关于矩阵半张量积的综述文章[10,11,12]。

矩阵半张量积的研究队伍正不断扩大，相关论文已有上千篇，作者单位包括（不完全统计）国内的北京大学、清华大学、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、东北大学、青岛海洋大学、北京理工大学、北京邮电大学、南开大学、山东大学、山东师范大学、聊城大学、上海交通大学、同济大学、东南大学、南京师范大学、电子科技大学、中南大京、华南理工大学、浙江师范大学、华东科技大学、山东科技大学、河北工业大学、中科院系统所、中科院信息工程所等。国际学者来自意大利、以色列、日本、美国、英国、俄罗斯、瑞典、南非、德国、澳大利亚、匈牙利、新加坡、伊朗、沙特阿拉伯等。

到目前为止，关于矩阵半张量积的研究主要集中于它的应用。在它的发展过程中也遇到许多质疑：包括它的原创性，它的合理性，等等。特别是关于它的数学内涵的质疑，让我们开始探索矩阵半张量积背后的数学——究竟矩阵半张量积会带来什么样的新的数学结构？本文的目的是向大家汇报一下我们近四、五年在这方面十分初步的一些工作。本文介绍的内容大多可在我们的长文[13]和专著[14]中找到。

首先，将不同维数的矩阵（包括向量和数）放到一起，这个无所不包的集合称为我们的泛维矩阵集合（记作M），它就是我们的研究对象。矩阵半张量积就定义在这个M上，它让M变成一个幺半群。我们发现，这个幺半群上有太丰富的代数结构、几何结构，以及动力学结构等。它们都不能被现有的数学理论所涵盖，这些构成我们称之为泛维矩阵的数学理论。虽然我们在这里拾了一两片贝壳，但它仍然是一片等待开垦的荒滩。下面列举几个我们正在探索的框架性问题：

（1）等价类：

两个矩阵在幺半群M 中称为是等价的，如果它们在矩阵半张量积下起的作用是一样的。等价类具有格结构。两个等价矩阵大小可以不一样，但形状必须是一样的。因此，我们将M分成许多份，记作$M_r$ ，这里 r 是矩阵行数与列数之比，因此，$M_r$中的矩阵形状都是一样的。$M_r$上可以定义加法，即用两个矩阵各自等价类中相同大小的两个代表元相加。于是，$M_r$成为一个跨维数的（准）向量空间。

（2）跨维数的李代数与李群：

现在考虑$M_1$ ，即所有方阵集合。用矩阵半张量积代替普通矩阵乘积，即可得到$M_1$上的一个李代数结构，称其为一般线性代数。可以证明，它虽然是一个无穷维李代数，却有有穷维李代数的几乎所有性质：从幂零、单代数，到Killing Form的性质等。这个跨维数的一般线性代数有与固定维数的一般线性代数类似的子代数，它们会生成跨维数的一般线性群及其子群。还可望找到它们

相应的表现理论。

（3）商空间：

等价类形成商空间，$M_r$上的商空间记作$Q_r$，它是真正的向量空间。适当定义内积，使之成为内积空间，并进而定义范数与距离。$Q_r$上可以定义不同的拓扑，如商空间拓扑，乘积拓扑及距离拓扑等。它们之间的关系还有待进一步厘清[15]。

(4) 纤维丛：

从矩阵空间到商空间的自然投影构成一个纤维丛结构，称为离散丛。这个纤维丛的每一片叶子是一个固定维数的微分流形，它们给基空间（等价类空间）一个泛维微分流形结构。于是，可产生相应的泛维向量场、张量场、积分曲线、分布等一系列几何结构。

(5) 泛维向量空间：

将不同维数的向量空间放到一起，形成一个泛维向量集合。在不同维数向量间定义加法。在加法中起相同作用的向量称为等价的。通过定义内积使泛维向量空间成一拓扑空间。将泛维矩阵半群作用于泛维向量空间，有许多新的现象出现，例如，非方矩阵的特征值与特征向量，等。需要扩展现有的固定维数矩阵理论。

（6） 变维数动态系统：

变维数动态系统有广泛的应用背景，如空间飞行器对接，汽车离合系统等。将半群$Q_r$用在泛维向量空间的（等价）商空间上，可望为变维数动态系统提供一个恰当的数学模型。从离散时间到连续时间，从自治系统到控制系统，这里有大量研究工作尚待开展[16]。

2019年是矩阵半张量研究快速发展的一年，这一年。我们成立了自动化学会控制理论专业委员会《逻辑系统控制》学组，并成功召开了学组的第一次学术研讨会。我们在聊城大学成立了“矩阵半张量积理论与应用研究中心”，越来越多的年轻人加入了我们的队伍，成为矩阵半张量积理论和应用研究的中坚力量。矩阵半张量积理论是一个真正中国人原创的，以中国学者为主的，同时具有理论和应用价值的科研方向。它正吸引着越来越多的国内外学者参加这个新方向的开拓。我们的目标是：打造一个中国品牌的新学科，引领国际上该方向的研究。我们正在创造历史，历史也必将记住我们。

## 参考文献

[1] Katz V J, A History of Mathematics: Brief Version, Addison–Vesley, New York, 2004.

[2] Cheng D, Semi–tensor product of matrices and its application to Morgan’s problem, Science China, Series F. Information Science, 2001, 44(2)：195–212.

[3] 梅生伟、刘锋、薛安成. 电力系统暂态分析中的半张量积方法，北京：清华大学出版社，2010.

[4] Cheng D, Qi H, Li Z, Analysis and Control of Boolean Networks, London：Springer, 2011.

[5] Cheng D, Qi H, Zhao Y. An Introduction to Semi–tensor Product of Matrices and Its Applications, Singapore：World Scientific, 2012.

[6] Guo Pl, Wang Y, Li H. Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary networked games via semi–tensor product method. Automatica, 2013, 49：3384–3389, 2013.

[7] Cheng D. On finite potential games. Automatica, 2014, 50(7)：1793–1801.

[8] Cheng D, Liu T, Zhang . On decomposed subspaces of finite games. IEEE Trans. Aut. Contr., 2016, 61(11)：3651–3656.
[9] Hao Y, Cheng D. On skew–symmetric games. Journal of Franklin Institute, 2018, 355：3196–3220.
[10] Lu J, Li H, Liu Y, Li F. Survey on semi–tensor product method with its applications in logical networks and other finite–valued systems. IET Contr. Thm & Appl., 2017, 11(13)：2040–2047.
[11] Fornasini E, Valcher M E. Recent developments in Boolean networks control. J. Contr. Dec., 2016, 3(1)：1–18.
[12] Muhammad A, Rushdi A, Ghaleb F A M. A tutorial exposition of semi–tensor products of matrices with a stress on their representation of Boolean function. JKAU Comp. Sci., 2016, 5：3–30.
[13] Cheng D. On equivalence of matrices. Asian J. Mathematics, 2019, 23(2)：257–348.
[14] Cheng D. From Dimension–Free Matrix Theory to Cross–Dimensional Dynamic Systems. LOndon：Elsevier, 2019.
[15] Cheng D, Liu Z. Topologies on quotient space of matrices via semi–tensor product. Asian J. Contr., (to appear), arXiv：1810.12773v2.
[16] Cheng D, Xu Z, Shen T. Equivalence–based model of dimension–varying linear systems. TEEE Trans. Aut. Contr., (under revision), arXiv：1810.03520v2.