

马路上的伯努利方程

张伟伟 太原科技大学力学系

伯努利方程是由丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli, 1700-1782）在 1726 年提出的，他是伯努利家族中众多杰出科学家之一，丹尼尔·伯努利最伟大的贡献就是将数学应用于力学，特别是流体力学^[1]。伯努利方程的表达式如下：

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = \text{constant} \quad (1)$$

其中， v 表示流体速度， g 为重力加速度， z 表示液面距离参考平面的高度， P 表示液体中的压力， ρ 表示液体密度。式 (1) 实质上描述了流体在流动中的机械能守恒（ $v^2/2$ 表示动能， gz 为重力势能， P/ρ 为压力势能），也被称为伯努利原理，是流体力学中的重要原理。伯努利原理最常用的一个推论是：等高流动时（即 z 保持不变），流速大，压力就小；流速小，压力就大。

文丘里管（流量计）可以很好地演示伯努利方程，如图 1 所示，包括“收缩段”、“喉道”和“扩散段”三个部分，并在均匀段 1 处和“喉道”2 处各设置一根连通的竖直管，其液面高度可用来指示该处的液体压力。当液体从图中左侧流向右侧时，由于管道截面收缩，液体流速将在截面变窄段增加，依据伯努利方程，流速大，压力就小；流速小，压力就大，就出现了两处液体压力不同，产生液面高度差。文丘里流量计被广泛用于测量空气、天然气、煤气、水等流体的流量。

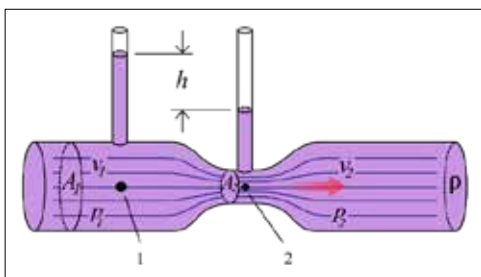


图 1 文丘里流量计^[2]

顺便说一下，伯努利原理是 20 世纪两项重要科技成果的理论基础，一是汽化器（发动机中也称为“化油器”），二是机翼设计。汽化器原理类似于我们日常所见的喷雾器^[3]，如图 2 所示，主要结构为一个三通管，如图 3 所示的压缩空气段，药液吸入段和喷口段，当空气流经收缩口时，速度增加，造成低压区，药液被吸入喷向出口，液体被高速空气撕成一小滴一小滴，这些小水滴就是雾，喷口处设置隔片可以使这种效果更加明显。



图 2 喷雾器花洒

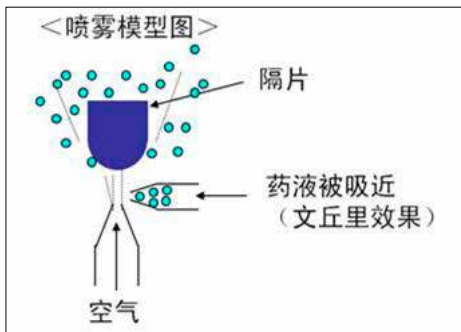


图3 喷雾器及其原理 (图片来源于网络)

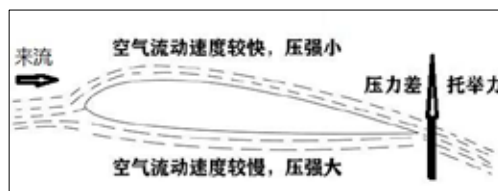




图4 机翼的升力原理

机翼上下表面形状的不同, 致使空气流过机翼时上表面速度大于下表面, 下表面压力大于上表面, 这种压差把飞机托起^[3], 见图4。

如果将马路上的车流类比于管道中的水流, 利用伯努利原理可以解释许多马路上的现象。为了说明这种现象, 我们将两者做如下类比, 如表1所示:

表1 管道中的水流与马路上车流的类比

	管道中的水流	马路上的车流
		
	假想管道中有水流	
	v 管道液体流速	车流速度: 马路上不看单一车辆的速度, 而是某路段截面上单位时间内通过的理论车辆总数
各项对应分析	z 液面高度差	路面高度差 (由于车速可控, 高度差不起作用)
	P 流体中的压力	马路上的交通压力
伯努利方程的表达式	$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = \text{constant}$	$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{constant}$
事故对比	管道内压力 P 过大, 两种结果: 1) 水管强度不够, 管道爆裂; 2) 管道强度足够, 液体被压缩;	交通压力增大增加两类事故的可能: 1) 车辆撞上围栏 (相当于管道爆裂); 2) 车距被压缩甚至追尾 (相当于液体被压缩);

说明: 由于车辆速度的可控性, 重力势能不引起能量转化, 其影响忽略不计

将马路上的车流视为管道中流动的液体(或气体),用伯努利方程来描述的话,水流速度可等价于马路上某路段的车流速度,定义为某路段截面上单位时间内通过的车辆总数,由马路的设计时速与车道数决定。设计时速高的道路车流速度就高,此外,车道数增加了单位时间内的车流量,也导致车流速度增加。例如,设计时速相同的情况下,假设单车道的车流速度是 v ,那么双车道的车流速度就为 $2v$,三车道时车流速度为 $3v$ 等等。

需要注意的是,由于人的主观性,马路上窄的地方人们通常会减速慢行,而在宽的地方会加速行驶,这正好与图 1 中粗管段流速小、细管中流速大相反。依据伯努利原理,等高流动时(马路上的车流近似为等高流动),流速大的地方压力就小,流速小的地方压力就大。可以得出,在车流速度慢的路段,交通压力就会增加,提高车流速度,就会在一定范围内减小交通压力。例如在十字路口,红灯导致车流平均速度降低,车流速度较慢,必然增加交通压力。因此,人们在出行时,如果有快速路(没有交叉路口)一般会选择快速路出行,这就是选择一条交通压力较小的路线。

为了缓解路口的交通压力,依据伯努利原理需要增加车流速度,需要注意的是,由于十字路口的特殊性,提高设计时速受限,因此,通过增加车道数就成为提高车流速度的有效方法。如图 5 中所示的十字路口,车辆行驶方向在达到路口时会增加车道数,图中行驶方向车道数与逆行行驶车道数相比为 4:2,是逆向车道数的两倍。由于逆向车道通过红绿灯后就可以提高行驶速度,这样就可以抵消车道减少造成的交通压力增加,从而在路面车道总数一定的情况下达到合理缓解十字路口交通压力的目的。

在红绿灯路口,增加行驶方向车道数、减少逆向车道数已成为大多数十字路口的设计准则,如图 6 中正向行驶车道数为 7,逆向行驶车道数为 3,其道理同样是为了减小交通压力所采取的道路设计。

对于高速路口,这一措施更加显得必要。如



图 5 十字路口行驶车道与逆向车道数之比为 4:2
(图片来源于网络)



图 6 十字路口(左侧)行驶车道与逆向车道数之比为 7:3 (图片来源于网络)



图 7 高速公路车口车道变宽
(图片来源于网络)

图 7 可以清晰地看到在高速出口,道路变宽,车道增加,来减小交通压力。图 8 给出了高速路口道面变宽的全景图,很明显高速出口段比其它路段要宽得多,也是通过增加车道数减小交通压力。



图8 高速公路车口车道变宽
(图片来源于网络)

如果抛开车辆状况、驾驶员状况、道路状况等因素,考虑理想道路行驶模型,道路拥堵、追尾等现象应该可以利用伯努利原理解释,即车流速度慢必然会造成交通压力增大,发生拥堵和追尾在所难免。2012年起我国实行高速路节假日免费通行以来,每逢节假日高速路车流量暴增,有些高速路段被戏称为“停车场”,高速追尾事故时有发生。依我个人的体验,很多追尾事故发生在限速路段。2018年清明假期,在回家的将近200千米的高速上有四起追尾事故,都发生在限速路段,其中一起事故就发生在动态限速指示牌不远的地方。这或许和伯努利原理有一定的关系。

当伯努利方程应用在高速路上时,由于高速路的车道数固定,因此交通压力就和道路限速有直接关系,在限速低的路段就会造成较大的交通压力。对于管道中的液体或气体,如果压力过大可能造成两种可能,一是管道爆裂;二是管道内的液体或气体被压缩。这一结果对应到高速路上,交通压力过大,就增加了车辆冲出护栏(管道爆裂)和车距减小甚至追尾(液体或气体被压缩)的可能性。

当然,马路上的伯努利方程是在一定条件下的宏观表现,只反映了交通问题的一个侧面,而实际的交通问题通常是由多种因素共同决定的,例如车辆的操控性能(如车辆失灵)、驾驶员因素(例如疲

劳驾驶)、违章行驶(如抢道、违规变道)、道路特征(如急弯、陡坡)等等,我们渴望一个快捷、安全、有序的交通环境,就需要从不断的研究和发现交通中的科学问题,遵循交通中的客观规律,只有实现交通中的从微观因素到宏观因素、从客观规律到主观行为的协调统一,才可能真正创造快捷、安全、有序的交通环境。

参考文献

- [1] 武际可. 伯努利家族在力学上的贡献[J]. 力学与实践, 2009, 31(3):103-105.
- [2] Wikipedia.Venturi effect. https://en.wikipedia.org/wiki/Venturi_effect
- [3] 杨惠山. 喷雾器和水流抽气机的工作原理的探讨[J]. 泉州师专学报:自然科学版, 1998(2):24-27.
- [4] 曹腾之. 伯努利方程在飞行器中的应用与简化推导[J]. 数字通信世界, 2017(2):71-72.