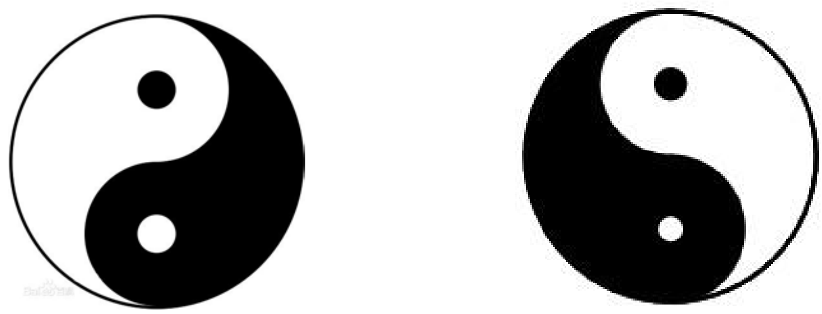
数学和物理系统中的对偶性漫谈

谢柏松　北京师范大学核科学与技术学院

众所周知，对偶性（Duality）始终贯穿于数学和物理学的发展，从最早的关于时间和频率、空间和波数的傅里叶变换到经典的电动力学，从相对论与量子力学到量子电动力学，从现代数学中的同调群理论，和现代物理中的超弦理论，再到黑洞物理，以及目前仍在探索的暗物质与暗能量的物理，无不闪耀着对偶性的光芒。可以这么说，对偶性原理已经成为数学和物理学的为数不多的几个基本原理之一，同时也是人们理解我们赖以生存的这个奇妙宇宙的规律的一个强有力的工具，她的意义还在发展与进一步探索之中。

本文就对偶性在一些数学和物理系统中的表现做些简略的回顾，通过一些例子展现她的魅力，做些可能带有个人倾向性的评述，以及对其未来的发展进行一些展望。

说到对偶性，我们不得不联想到中国传统文化周易中的阴阳太极图，见图 1。之所以如此，是因为一方面这是先贤最古老的关于宇宙生成和演变的哲学认识论模式的对偶性，另一方面也是本文讨论的数学和物理这些相对来说比较理性和抽象的东西与古老东方比较感性和直观的周易图像的互为对偶，这是不同对偶模式之间的更高层次的进一步对偶，这一阳中有阴（白鱼的黑眼睛）和阴中有阳（黑鱼中的白眼睛）的无极而太极，太极而无极的对偶嵌套的互补又统一，自我复制与组织又自我相似与超越的宇宙图景，谁说这不是人类心智之光与浩瀚宇宙的星光交相辉映而相得益彰的奇妙的对偶？是的，对偶无处不在，也无时不在，她是时空的宠儿，也是你我生命中的良师益友，让我们一起走进她的心中。



（a）左旋顺时针太极图，↓>自旋态　　(b)右旋逆时针太极图，↑>自旋态

图 1：周易阴阳鱼太极图

1. 数学和物理中对偶性的一些简单的例子

在本小节我们给出对偶性的一些简单的例子。最简单的例子在初等数学和物理中就已经碰到过。例如加和减的对偶，乘和除的对偶，平方和开平方根的对偶，弹簧谐振子中弹簧的形变位移和振子的速度之间的对偶，电磁学中电场和磁场的对偶等等。更多的例子如下：

例 1：微分与积分对偶，这个在学习微积分和高等数学时就已经知道，不再赘述。

例 2：从三个彼此不平行的单位矢量 a，b，c 做出以下三个新的单位矢量 a’，b’，c’：

$$\mathbf{a}' = \mathbf{b}\times\mathbf{c}/|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|,\quad \mathbf{b}' = \mathbf{c}\times\mathbf{a}/|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|,\quad \mathbf{c}' = \mathbf{a}\times\mathbf{b}/|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$

这样 a’，b’，c’ 就是与 b×c，c×a 和 a×b 同向的单位矢量，显然 a，b，c 也是与 b’×c’，c’×a’ 和 a’×b’ 同向的单位矢量。因此 a，b，c 与 a’，b’，c’ 互为对偶[1]。可以记作*a=a’，表示 a 的对偶是 a’，同理，*a’=a，其余类推。显然有**=Id，即对偶的对偶是自身。如果*()=()或*()=-()，通常()就称为自对偶(Self Duality, SD)和反自对偶(Anti-Self Duality, ASD)。

通常通过如下方式可以构造出自对偶 SD=（F+*F)/2 和反自对偶 ASD=(F-*F)/2，显然有*SD=SD 和*ASD=-ASD。例如记一个复数的共轭数为其对偶，即*$(a+ib)=a-ib$，那么 SD=a，而 ASD=ib。又例如记自旋态反转为其对偶，则 SD=(↑> + ↓>)/2 和 ASD=(↑> - ↓>)/2。

例 3：Fourier 变换函数之间的对偶。函数 $F(\omega,k)$ 和 $f(t,x)$ 分别是如下傅里叶变换的像函数和原函数。

$$F(\omega,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\exp[i(kx-\omega t)]dtdx$$

同理 $f(t,x)$ 和 $F(\omega,k)$ 则是傅里叶逆变换

$$f(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}F(\omega,k)\exp[-i(kx-\omega t)]d\omega dk$$

的像函数和原函数，因此 $f(t,x)$ 和 $F(\omega,k)$ 互为对偶。如果原函数的宽度是 Δt（关于时间）和 Δx（关于空间），则像函数的宽度 $\Delta\omega$（关于频率）和 Δk（关于波数）有如下关系：$\Delta\omega\Delta t\sim 1,\ \Delta k\Delta x\sim 1$。这启发我们得到这样的结论：时间与频率对偶，空间与波数对偶，而时间的变化 Δt 和时间变化（快慢）的变化 $\Delta\omega$ 满足测不准原理，同样空间的变化 Δx 和空间变化（波数）的变化 Δk 也满足测不准原理。这将直接导致量子力学中著名的波粒二象性和海森堡测不准原理。一个极端的例子是狄拉克的 δ 函数和一个常数是互为对偶的傅里叶变换，显然前者的宽度是 0 而后者的宽度是无穷大。另一个例子是高斯分布函数的傅里叶变换还是高斯函数，它们的宽度互相成反比，这也是 SD 的体现。

例 4：波粒二象性和海森堡的测不准原理。波与粒子对偶，并且粒子的能量和动量与波的频率和波数之间的关系由普朗克常数$\hbar$联系如下：$E=\hbar\omega$ 和 $\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$，并且有著名的海森堡测不准原理：$\Delta E\Delta t\geq\hbar/2,\ \Delta p\Delta x\geq\hbar/2$。这就是量子力学中的不确定性原理Uncertainty principle)，它表明粒子的能量和时间，或粒子的位置与动量不可同时被确定。

波粒二象性，即波与粒子之间的对偶直接导致了德布罗意物质波的假说（见图 2），他声称，所有物质粒子都拥有波动属性。海森堡的不确定性原理也已经成为量子力学的重要基石之一(图3)。

图 2：德布罗意的物质波（注，图片来自 http://www.sohu.com/a/157837840_479097）

图 3：海森堡的不确定性原理（注，图片来自 http://www.baike.com/wiki）

例 5：斯托克斯（Stokes）定理中隐藏的对偶性。首先我们看一下什么是斯托克斯定理，一个简单的情况是这样表述的：一个矢量场函数在一条曲线上的路径线积分是该矢量场的旋度在以这条曲线为边界所张成的二维曲面上的面积分，即

$$\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\iint(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

在笛卡尔三维直角坐标系中可以写成如下形式：

$$\int(A_x dx+A_y dy+A_z dz)=\iint[(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})dydz+(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})dxdy]$$

如果把 dx,dy,dz 理解为是三个轴方向的单位矢量，dydz 理解为 dy 和 dz 两个单位矢量的叉乘即 $dy\wedge dz$，那么按照例 2 的说法*dx=dydz, 这个几何学上有方向的单位线元和有确定（法线）方向的单位面积元之间的对偶性就能自然地诱导出一个矢量场和它的旋度之间的对偶性（1 维空间积分到 2 维空间积分的关系），如果是 2 维空间积分到 3 维空间积分的关系，则是如下的形式，

$$\iint(A_x dydz+A_y dzdx+A_z dxdy)=\iiint\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dxdydz$$

也即 $\iint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\iiint(\nabla\cdot\mathbf{A})dV$。

斯托克斯定理更一般地来说是庞加莱对偶性（Poincare Duality）的体现，这是关于流形上外

微分形式的同调群以及上同调群之间的同胚性关系的对偶性联系，由于涉及到较复杂的数学定义和解释，这里不作详细讨论。但我们可以写出以下这个公式，它有一个很长的名字，叫做：牛顿-莱布尼兹-高斯-格林-奥斯特-斯托克斯-庞加莱公式

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{c} d\omega$$

这里 c 是流形 M 上任一个 $(k+1)$ -链， ω 是 M 上任意的 k -形式。对此有兴趣的读者请参阅[2]的第 151 页内容。

2. 经典力学中的对偶性

经典力学中对偶性最明显的一个例子是拉格朗日系统和哈密顿系统描述的对偶性。一般来说，根据系统的拉格朗日密度函数可以得到力学的作用量泛函，再根据最小作用量原理，通过求泛函极值而得到力学系统的运动方程组。通过各种求解方法便能解决很多实际的力学问题。

通常，n 个自由度的拉格朗日方程组是 n 个二阶的微分方程形式，但它等价于 $2n$ 个一阶方程的哈密顿方程组，即

$$\dot{q} = \partial H / \partial p, \dot{p} = -\partial H / \partial q$$

其中 $H(p,q,t) = p\dot{q} - L(q,\dot{q},t)$ 是拉格朗日函数关于 $\dot{q}$ 的勒让德变换。显然这么做的好处是方程组具有辛几何结构，而且在向量子力学延伸，特别是在量子场论中关于场的二次量子化，即正则量子化方面起到了直观和重要的作用。图 4 是拉格朗日方程和哈密顿方程的对偶性示意。

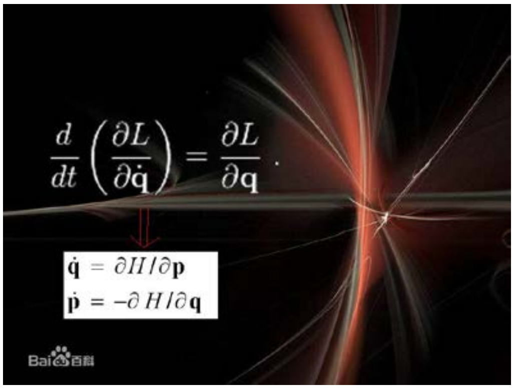


图 4：拉格朗日方程到哈密顿方程（注：图片来自搜狗百科）

这里面对对偶性起重要作用的是勒让德变换：即再次做勒让德变换即是恒等变换。

前苏联著名力学家阿诺德在其名著《经典力学的数学方法》一书[2]的序言中写到“哈密顿形式化是量子力学的基础，而且是物理学的数学武器库中最常用的工具之一。在认识到辛构造和惠更斯原理对各种优化问题的意义以后，工程计算中也开始经常应用哈密顿方程了。另一方面，与空间探索相关的天体力学的新近发展，也为分析力学的方法和问题赋予了新的意义。”

在该书的第三部分“哈密顿力学”的开始介绍中作者又写道：“哈密顿的观点使我们能完全解出一系列力学问题，而用其他方法不能得解（例如，两个恒定中心的吸引问题和三轴椭球上的测地线问题）。对于摄动理论的近似方法（天体力学），以及了解复杂力学系运动的一般性质（遍历理论，统计力学），以及与其他数学物理领域（光学，量子力学等等）的联系上，哈密顿的观点甚至有更大的价值。”

实际上，哈密顿的观点在 20 世纪后半叶还促进了混沌学的发展，特别是对哈密顿系统的可积性、混沌的发生以及遍历性的发展起到了巨大的作用。同时它也在某种程度上对诸如有序、无序、有序中的无序和无序中的有序（对应着文章开头所述中国传统文化周易中的阳、阴、阳中有阴和阴中有阳）等等这些哲学上二元对立统一的概念作了数学上的理解和物理上直观图像化的展示。

3. 相对论与量子力学中的对偶性

相对论和量子力学是现代物理学的两大基本支柱。经典物理学基础的经典力学，不适用于高速运动的物体和微观领域。相对论解决了高速运动问题；量子力学解决了微观亚原子条件下的问题。

爱因斯坦相对论是关于时空和引力的基本理论，主要由爱因斯坦创立，分为狭义相对论和广义相对论。相对论的基本假设是相对性原理，即物理定律与参照系的选择无关。狭义相对论讨论的是匀速直线运动的惯性参照系之间的物理定律，后者则推广到具有加速度的参照系中（非惯性系），并在等效原理的假设下，广泛应用于引力场中。相对论颠覆了人类对宇宙和自然的常识性观念，提出了“时间和空间的相对性”，“四维时空”，“弯曲空间”等全新的概念。狭义相对论提出于 1905 年，广义相对论提出于 1915 年。

爱因斯坦相对论中的对偶性非常有趣，首先相对论一词本身就体现了某种对偶性的意义，在狭义相对论中的洛伦兹变换就是连接两个参考系的对偶性原理，就像上述的勒让德变换，作用两次后即是自身，也就是说对偶的对偶即是返回。至于广义相对论中的对偶性，这方面既有一般哲学上的对偶性考虑，例如时空弯曲与引力场的等效性对偶原则，更有许多实际的对偶性的物理研究，例如在四维黎曼几何下的爱因斯坦方程的引力瞬子就具有反自对偶的特性[3]，虽然目前引力的量子理论还在探索之中，但这种对偶性的思想已经渗透到了试图完成引力量子化的研究中，这在关于弦论和

超弦理论建构和研究中表现得更加明显[4]。

我们还是看看爱因斯坦自己怎么说的，他晚年在《什么是相对论》一文中[5]写道“狭义相对论本来就是麦克斯韦和洛伦兹的电动力学的系统化发展，但它又超越了自身。”就广义相对论，他又说：“在广义相对论中，关于空间和时间的学说，或称运动学，不再是与物理学的其他方面无关的了。物体的几何特性和运动依赖于引力场，这些场本身又是由物质产生的”。这些话背后的含义很丰富，当然无论是洛伦兹变换、麦克斯韦方程组中的电与磁，还是黎曼几何中的场，都隐藏着由某些对称性支配的对偶性原理。在爱因斯坦这篇《什么是相对论》短文的最后，他给了一个非常有趣的附言，而且说可以看做是生活中一个相对性原理的应用以娱读者——在德国他被称为“德国的学者”，而在英国，人们称他“瑞士的犹太人”，爱因斯坦自己调侃道：如果命中注定讨人嫌的话，德国人应称他为“瑞士的犹太人”，对英国人来说，他是“德国的学者”。这则有趣的附言是生活中的相对论性，又何尝不是生活中的对偶性？而且大凡对 20 世纪上半页历史有所了解的人都不会不注意到爱因斯坦此处的关于生活的相对论性的调侃其实包含着个人与犹太民族的辛酸与坚强，这种物质世界与精神世界的对偶性恰恰是人性和自然的最佳互补。

现在我们进一步谈谈量子力学。量子概念是 1900 年普朗克首先提出的，到今天已经一百多年了。期间，经过玻尔、德布罗意、玻恩、海森堡、薛定谔、狄拉克、爱因斯坦等许多物理大师的创新努力，到 20 世纪 30 年代，初步建立了一套完整的量子力学理论。在前面我们已经谈到波粒二象性问题和海森堡测不准原理所显示的对偶性，但其中的一些带有哲学意味的观点和结论似乎与混沌理论有相似和密切联系之处。例如已故的黄祖洽院士曾经在 80 多岁高龄时仍在北师大坚持给本科生上《现代物理学前沿选讲》课[6]，他在该书的绪论中有这么一段话：“我们从量子理论中已经认识到在微观世界里关于因果关系和决定论的传统观念变得‘模糊’了，并且认识到这种模糊是怎么产生的......从非线性动力学中我们还认识到，由于非线性效应使初始条件的细微变动引起指数增长式的巨大影响（所谓“蝴蝶效应”，意指即使远在亚马逊丛林中一只蝴蝶扑动了一下翅膀，由于大气动力学非线性效应的传递和强化，也可能在西太平洋引起一场大风暴），因果关系和决定论在宏观世界中也变得‘模糊’起来。人们了解到，尽管自然规律非常严格，但世界上还有很多重要的东西实际上无法预测，这是物理学的许多重要新发现之一。”这再次说明对一个系统可能存在互为对偶性的描述，即使对偶的描述是等价的，但在描述精度上可能是不等价的，相反是互补的，例如电子或光子系统可以用粒子性来描述，也可以用对偶性的波动性来描述，但粒子性描述越准确，则波动性描述就越模糊，反之亦然。这是量子力学区别于经典力学的奇妙之处。

在 2008 年 8 月出版的一期《自然》杂志上，瑞士的几位科学家公布了他们的一项新研究成果：发现原子、电子以及宇宙空间其他所有的微观物质都可能会表现出异常奇怪的行为，其行为规律可能与我们日常生活中传统的科学规律完全背道而驰。比如，物体可以同时存在于两个或多个场所；可以同时以相反的方向旋转。这个 1935 年爱因斯坦等人提出的 EPR 佯谬

现象现在被称为“量子纠缠”，即不管物体之间的距离有多远，可以存在“量子纠缠”的联系方式。量子纠缠是现在非常时髦的量子信息研究的理论基础，也是未来量子计算机和量子通信所必需的技术基础[7]。

量子纠缠最新的发展则是一个 EPR=ER 这一“骇人听闻”的对偶性的公式，左边和右边都是爱因斯坦和他的合作研究者在 1935 年“美国物理评论”上发表的两篇论文，EPR 是质疑量子力学的完备性和超距相互作用的，如前所述由此引出了贝尔不等式的发现从而发展出了量子纠缠概念，而 ER 是关于爱因斯坦方程中可能存在的时空虫洞解，通常称之为“爱因斯坦-罗森桥”，是连接两个遥远空间的一个快速通道。本世纪初有人研究发现，这个 ER 的虫洞的解可以解释成两个黑洞的最大纠缠态，它可以形成复杂的 EPR 对。2013 年研究人员进一步研究了规范场-引力对偶性以及有一个虫洞的 EPR 对的全息对偶性。全息对偶性是弦论中各种对偶性的一个重要内容，但由于篇幅所限，弦论中的 T 对偶，S 对偶（即强弱对偶），U 对偶，H 对偶（即全息性对偶）和 AdS/CFT 对偶（即反德西特空间/共形场论对偶）等[4]我们将在另外一篇文章中详细介绍。

4. 物质与场的对偶性

通常人们认为物质是具有个体特性的东西，而场则是传递物质之间相互作用的一类特殊的介质，例如有质量的物体之间有引力场相互作用，或者有电荷的粒子通过电磁场发生相互作用等等。物质与物质之间，或者场与场之间的对偶性人们容易理解，但物质与场之间的对偶性似乎有点怪异，因为它消除了物质和场的传统意义上的界限，使得“看得见”的物质和“看不见”的场之间的差别变得模糊了。

如前所述，爱因斯坦广义相对论的等效性原理鲜明地把由于物质的存在使得时空弯曲对偶于引力的场，这方面更多的例子在弦论里也会出现，但这里我们要指出的是在量子电动力学中也有这样的对偶性，甚至于这种对偶性发生在虚粒子和虚的时空背景下一个虚的场中，

这方面最典型的一个例子就是在强外场下量子电动力学的真空失去稳定从而产生正反物质，产生这种正反物质的物理过程叫施温格机制，因为 1951 年物理学家施温格详细研究了它，并且还有重整化的贡献，因而他获得了 1965 年诺贝尔物理学奖。我们可以这样来理解施温格机制产生正负电子对的物理图像，真空中不断涨落的带电荷的虚态正负电子实际上与虚的电磁场联系着，在外加强电场作用下，它的量子真空态的衰变几率与有效作用量 S 有关，而正负电子对的产生率 W 与有效作用量 S 之间满足指数化抑制的关系，即 $W \propto \exp(-S)$。这一关系可以从标准和传统的 WKB 近似方法得到，但是也可以通过以下的对偶方式得到：首先把时间虚数化，实现闵可夫斯基空间到欧几里得空间的对偶，再通过拉格朗日量的不变性实现外电场与虚的磁场之间的对偶，然后通过虚的带电粒子在虚的磁场下做回旋运动而得到世界线瞬子场，那么就实现了真空态中的带电粒子与这个瞬子场的

对偶。而这个瞬子场的威尔森线积分就是正负电子对产生几率的指数因子 S，它同时也是在外加磁场 iE下的阿哈诺夫-玻姆的虚相位 iS，显然代入虚相位到阿哈诺夫-玻姆的相位因子上意味着 $\exp[i(-iS)]=\exp(-S)$。

最近几年，我们对正负电子对产生问题进行了一些研究[8]，其中关于世界线的瞬子技术如果推广到非阿贝尔的杨-米尔斯规范场中，就与微分几何不变形式，特别是陈-西门斯的渡越形式有密切联系，显然更为复杂和深入的研究将涉及到正负夸克对产生的研究而且要用到 AdS/CFT 的对偶性原理等，这方面内容将在以后的文章中再加分析和讨论。

总之，物质与场的对偶性把数学与物理、时空与几何、现实与虚幻等等极其优美与奇妙地联系在了一起，以致于我们不得不思考：宇宙是一个互相对偶又超越了对偶性的整体结构。

5. 对对偶性及其超越对偶性的一些思考：现实与虚幻

霍金在《果壳中的宇宙》（The Universe in a Nutshell）[9]第三章标题下的解说词中说道“宇宙具有多重历史，每一个历史都是由微小的硬果确定的”，霍金还在开篇处引用莎士比亚戏剧《哈姆莱特》第二幕二场主人公的心声“即使把我关在果壳，仍然自以为无限空间之王”，显然，文学家和物理学家都从不同的角度对诸如小和大，多和少以及强和弱做出了不同程度但也高度相似或一致的理解。这说明所谓的对偶性可能具有普遍的哲学意义和宇宙学的意义。

彭罗斯和霍金证明的定理指出，宇宙必须有一个开端，即通常所谓的宇宙大爆炸奇点或塌缩黑洞的奇点处物理定律失效。不过后来霍金与合作者宣称，如果把实时间变换成虚时间，那么就能消除奇点。另外如果对时间进行虚数化处理，那么大家熟悉的经典物理中的热传导方程即刻就变成了量子力学的薛定谔方程，当然这时的温度函数要解释成薛定谔方程中的几率波函数，对其套用的经典形式的扩散解此时就是费曼路径积分的形式，还有在上一节提到的世界线瞬子，它实现的前提是把实时间换成虚时间，实电场换成虚磁场。因此有理由相信在一个更大的框架下，有一个统一的理论存在，在这个理论中，物质与场，现实和虚幻都将被统一地看待与描述。这也是为什么包括爱因斯坦在内很多的物理学家都期待终极理论的出现。超对称理论就把自旋为 1/2 的奇数倍（即半整数自旋）粒子，例如电子、质子等，和整数自旋的粒子，例如光子等完全统一了。

但宇宙的诡异之处在于她总是有一道裂缝，就在 19 世纪末，当人们为经典物理学的巨大成就而欢欣鼓舞，认为物理大厦已经巍峨屹立，头顶上不过只剩下两朵乌云需要驱散时，却最终引发了 20 世纪初相对论和量子力学这两场伟大的变革。而 20 到 21 世纪之交，大统一理论仍然没有实现，却迎来了更大的乌云：暗物质与暗能量。

这种状况似乎与哥德尔的不完备性定理保持了某种自洽式的默契。同时这种图景也让人感受到古希腊神话西西弗式的悲剧性色彩：西西弗因触犯众神，诸神为了惩罚他，便要求他把一块巨石推上山顶，而那巨石一到山顶就又滚下山去，于是他只能不断重复、永无止境地循环推石。

然而，对偶性的存在似乎给人们以更大的启示：人们不必为“此”而耿耿于怀，此路不通，就走彼处，所谓“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”是也。

尽管如此，如果我们把对偶性从数学物理的描述性的物质层次提升到更大的范围和更高的程度，也许对偶性能把我们带到一个极致，甚至是超越了对偶性的一个新天地。虽然我们不知道提升和扩展的全部细节，但我们可以猜想她可能发展的脉络和图景：例如量子力学的测量问题及其量子纠缠态的传输等，这些问题的深入研究将对意识与物质相互作用的理解有极大的推动和促进作用，另外人工智能的发展和网络化的世界图景也将给予人类以全新的思维。

最后我要再一次提及中国古老周易的阴阳鱼，我个人认为这是一张全息性的对偶图，包括了阴阳两种元素的对偶，以及阴中有阳、阳中有阴的无穷无尽的自相似结构。我们生活在你中有我，我中有你互相纠缠和互相依存，也是互相对偶的网络化的世界。

我们是谁？有一个答案是：对偶的对偶是自己！

参考文献

[1] 华罗庚. 高等数学引论(第一卷第一分册)，页码：54–55. 科学出版社，北京，1979.
[2] 阿诺尔德著，齐民友译. 经典力学的数学方法. 高等教育出版社，北京，2006.
[3] Dunajski M. Solitons, Instantons and Twistors. Oxford Univ. Press, UK, 2010.
[4] Becker K, Becker M, and Schwarz J H. String theory and M–theory: A modern introduction. Cambridge University Press, UK, 2007.
[5] 爱因斯坦著（方在庆，韩文博，何维国译）. 爱因斯坦晚年文集，页码：47–51. 海口：海南出版社，2014.
[6] 黄祖洽. 现代物理学前沿选讲. 北京：科学出版社，2007.
[7] 曾谨言，裴寿镛，龙桂鲁. 量子力学新进展 (第二辑). 北京：北京大学出版社，2001.
[8] 谢柏松，李子良，唐琐，刘杰. 超强场下的正负电子对产生. 物理，2017，46：713.
[9] 霍金著，吴忠超译. 果壳中的宇宙. 长沙：湖南科学技术出版社，2006.