

## 量子态控制的奥秘

丛爽 中国科学技术大学

相对于宏观世界中的系统，量子系统是指微观世界中的各种粒子，比如：原子、分子、光子中的一种，其中每一种都是一个量子系统（见图 1）。

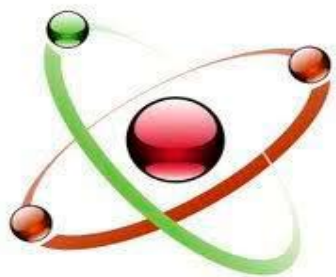


图 1 分子量子系统

不论是由单个粒子还是由多个粒子组成的量子系统，每一个粒子一般都具有自己的一个运动轨迹，同时自身还有自旋运动（见图 2）。

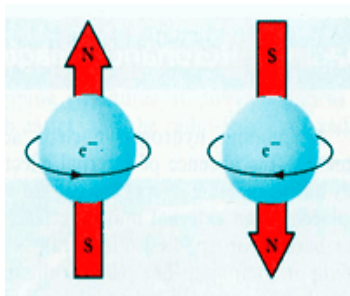


图 2 单个粒子自旋状态

对量子系统中状态的描述是对每一个（位）粒子的状态进行数学上的定义，比如：将自旋向上定义为 $|0\rangle$ ；自旋向下定义为 $|1\rangle$ ，以此方式，任意一个量子位可以用两种自旋状态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 来描述。此定义与我们现在普遍使用的冯·

诺伊曼计算机中二进制的 0 和 1 概念是相同的，只是用狄拉克的右矢符号 $|\bullet\rangle$ 表明为量子态，这也使得人们想到的第一个量子系统的应用应当是量子计算机。

不过与宏观计算机特性不同的是，任一量子位的状态始终处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加态： $|\psi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle$ ，即所谓的叠加性。这一特性使量子操作成为真正的并行运算。这也促使加拿大科学家在 2007 年 2 月研制出全球首台量子计算机（处理器）D-Wave（见图 3），以及 2017 年 5 月，潘建伟团队研制出 10 量子位超导量子模拟机。与几十年前宏观计算机从微处理器到计算机的发展历程相似，目前的所谓量子计算机都是一些仅能够进行特殊运算的处理器，如：加法、线性方程组求解、纠缠态制备等。一个完整的计算机需要位数多、功能齐全，这两部分都需要不断加以完善，随着量子位数的增加，实现的难度增大，不过，真正量子计算机的实现也只是时间上迟早的事情。



图 3 D-Wave 量子处理器

那么,量子态的叠加性还给我们带来什么?一个量子位的两个本征态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 组成的叠加态中,各有一个复系数 $c_i, i=1,2$ ,它们的平方和满足: $\sum |c_i|^2 = 1$ ,它们值的大小决定着—个量子位不同的结果。那么, $c_i, i=1,2$ 的物理意义是什么?给一个实际的例子:有一枚旋转的硬币,我们用 $|0\rangle$ 代表硬币的正面, $|1\rangle$ 代表硬币的反面,当其处于旋转过程中,该硬币就处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加态,如果我们问:当我按住硬币,该硬币处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的概率各占多少?回答应当是:各占50%,因为其结果不是 $|0\rangle$ 就是 $|1\rangle$ 。不错, $c_i, i=1,2$ 的物理意义就是各复系数的模方等于一个量子态处于各本征态的概率!这就是量子态的另一个特性:概率性。对量子状态的调控实际上就是对量子态中复系数的调控。所以,量子系统的控制是一种不确定的概率控制。

还以旋转硬币为例,平行旋转硬币的表达式为: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ 。前面提到按住硬币猜结果,就涉及到量子态的观测,引出第三个量子态特性:量子态观测的塌缩性。如果正面和反面分别用 $|YES\rangle$ 和 $|NO\rangle$ 来表示,那么,观测到的结果不是 $|YES\rangle$ 就是 $|NO\rangle$ ,叠加态塌缩到某一个本征态(宏观态)。人们可以通过观测结果来获得量子态中各本征态的概率,其过程为:重复多次地进行观测,通过统计每次的结果获得。比如:在100次观测中,有51次为正面,49次为反面;再通过计算 $51/100$ ,和 $49/100$ ,得出正面和反面的概率分别为:51%和49%。这个结果随着观测次数的增加,会越来越接近50%:50%。量子态的重构或观测也是如此进行的。

量子态第四个特性是相干性。此特性也是宏观系统中所没有的。一个量子态除了可以采用波函数 $|\psi\rangle$ 表示外,还可以采用密度矩阵 $\rho$ 来表示,它等于波函数的外积 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 。一个量子位的密度矩阵 $\rho$ 可以表示为:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = c_1^2|0\rangle\langle 0| + c_1^\dagger c_2|0\rangle\langle 1| + c_1 c_2^\dagger|1\rangle\langle 0| + c_2^2|1\rangle\langle 1|$$

$$= \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2^\dagger \\ c_1^\dagger c_2 & c_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}$$

其中, $|0\rangle = [1 \ 0]^T$ , $|1\rangle = [0 \ 1]^T$ 。

采用密度矩阵表示量子态的另一个优点是,密度矩阵的元素具有明确的物理意义:其对角线元素 $\rho_{11}$ 和 $\rho_{22}$ 就是系统中各本征态的概率,而非对角线元素 $\rho_{12}$ 和 $\rho_{21}$ 描述量子态各本征态之间的相干性。正是由于量子态的叠加性及其相干性给量子计算带来了指数级的加速:求解一个亿亿亿变量的线性方程组,利用目前最快的超级计算机需要100年,而利用GHz时钟频率的量子计算机将只需要10秒钟;利用万亿次量子计算机,则只需要0.01秒。利用万亿次经典计算机分解一个300位的大数,需要150000年;而利用万亿次量子计算机,则只需1秒钟。

最后再讲一讲量子态的纠缠性。量子纠缠态是指两个位以上的不可分离的叠加态。以两个位为例:任何一个 $n=2$ 的量子系统具有4个本征态,任何形式的叠加态都是该量子系统的状态,比如: $|\psi\rangle = c_1|00\rangle + c_2|11\rangle + c_3|01\rangle + c_4|10\rangle$ , $|\psi_3\rangle = c_1|00\rangle \pm c_3|01\rangle$ ,其中 $|\psi_3\rangle$ 可以分解为 $|\psi_3\rangle = |0\rangle \otimes (c_1|0\rangle \pm c_3|1\rangle)$ ,但是,状态 $|\psi_1\rangle = c_1|00\rangle \pm c_2|11\rangle$ 或 $|\psi_2\rangle = c_3|01\rangle \pm c_4|10\rangle$ 是不

可分离的叠加态，这 4 个量子态就是纠缠态。纠缠态都是成对出现的，就像手套和鞋子，这样，当你知道了一对纠缠态中的一个本征态，就立刻知道另一个本征态。在两个量子位中，知道纠缠态中的一个本征态为 $|00\rangle$ ，则纠缠态中的另一个本征态一定为 $|11\rangle$ ；同理可得， $|01\rangle$ 对应着 $|10\rangle$ 。

纠缠态的主要应用是在量子通信中，2017 年 6 月 15 日《科学》杂志封面上刊登了量子卫星“墨子号”从星空向地面相距 1203 千米的两处进行纠缠分发（见图 4），这是国际上首次突破上千千米的纠缠态传递。

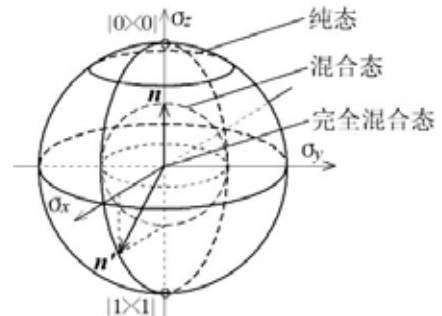


图 4 《科学》杂志份封面上报道“墨子号”

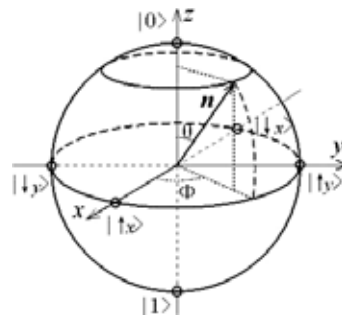
实际上，不论在量子计算还是量子通信中所需要解决的关键问题，都是量子态调控的控制问题，这其中包括：量子计算机中基本量子门的制备；量子系统中的任意态-态转移；量子密度矩阵中布居数的控制；量子状态的测量、信息获取、状态估计与重构；状态的存储、保持与消相干的抑制；量子系统的跟踪控制和量子系统反馈控制。

基于量子态所具有的 5 个特性：叠加性、概率性、塌缩性、相干性和纠缠性，量子态的控制具有什么奥秘？实际上，只要抓住量子态特性，针对量子态的不同描述方式，我们能够

很容易地掌握量子系统所表现出的特性，对其状态进行有效的调控。在量子态的各种数学描述中，不同方式的数学表达式反映出不同的量子特性：波函数是矢量表示法，表征量子系统的本征态 $|0\rangle = [1 \ 0]^T$ ， $|1\rangle = [0 \ 1]^T$ 和叠加态 $|\psi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle$ ；密度矩阵表示法既能够表示由本征态和叠加态组成的纯态，也可以表示混合态。这些状态可以清楚地在一个半径为 1 的 Bloch 球上表示出来，如图 5 所示，其中，z 轴上的 1 处为 $|0\rangle$ 态，z 轴上的-1 处为 $|1\rangle$ 态，整个 Bloch 球表面上的值为叠加态，整个 Bloch 球内为混合态。



(a) 纯态



(b) 混合态

图 5 Bloch 球表面上的量子态表示

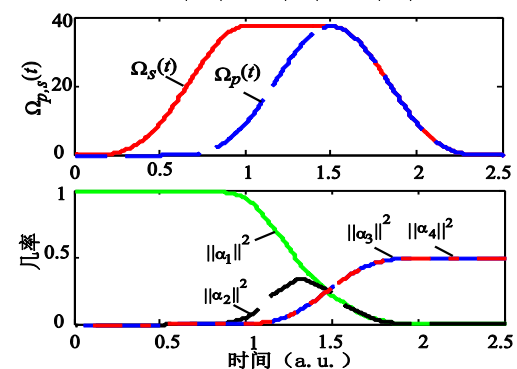
由于量子控制是对量子态复系数的概率控制，要想达到控制目标，不能允许有误差的存在，因为，1%误差意味着达到不期望目标。所

以量子控制只能是收敛控制。量子态与门的制备、量子态-态转移、量子布居数控制等都属于量子系统控制。

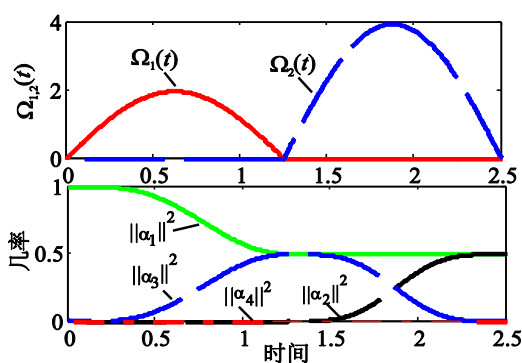
在量子态制备方面，以制备纠缠态为例，4种形式的最大纠缠态，也就是 Bell 态为：

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \text{ 和 } |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}i(|01\rangle \pm |10\rangle)。$$

对其制备就是对各本征态的概（几）率幅的控制。图6为分别采用半反直觉脉冲控制序列方法以及  $\pi$  脉冲动力学方法对两种纠缠态的制备过程<sup>[1]</sup>，其中，图6(a)中的上图为所设计的半反直觉脉冲控制序列，下图为量子系统中密度矩阵各个元素在控制脉冲的作用下的变化过程：纠缠态  $|\psi_1\rangle = a_3|01\rangle \pm a_4|10\rangle$  中的概率



(a) 半反直觉脉冲控制序列方法

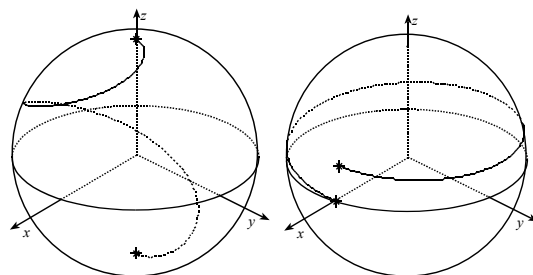


(b)  $\pi$  脉冲动力学方法

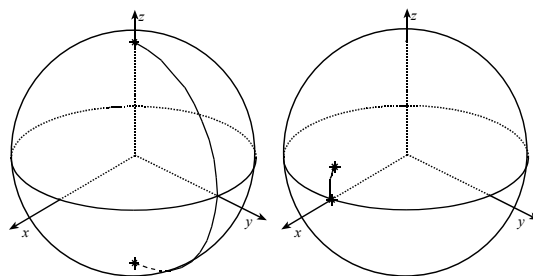
图6 两种不同控制方法下两种纠缠态的制备过程

系数（ $a_3$  和  $a_4$  的模方） $\|a_3\|^2$  和  $\|a_4\|^2$  分别达到 0.5；图6 (b)中的上图为采用  $\pi$  脉冲动力学方法所设计的控制序列，下图为量子系统中密度矩阵各个元素在控制脉冲的作用下的变化过程：纠缠态  $|\psi_2\rangle = a_1|00\rangle \pm a_2|11\rangle$  中的概率系数（ $a_1$  和  $a_2$  的模方） $\|a_1\|^2$  和  $\|a_2\|^2$  分别达到 0.5。

在量子状态的转移调控中，调整控制律中不同的参数，可以得到不同的运动轨迹与控制效果，图7为分别采用最小控制能量，以及最小控制时间获得的量子态的转移轨迹<sup>[2]</sup>。由于希望能量最小，促使图7(a)中状态的演化轨迹很长，花费的时间较多；而在给定的期望时间下设计出控制导致状态的演化轨迹为最短。



(a) 控制能量为最小下的演化轨迹图



(b) 给定时间  $T$  下的演化轨迹

图7 不同控制参数下量子态的转移轨迹

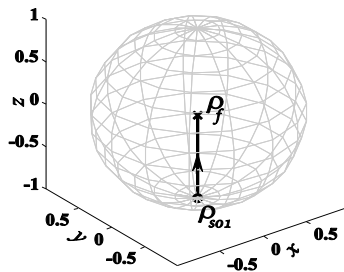
在量子状态信号的测量中，起主要影响作用的是量子态的塌缩性：测量后的量子态塌缩到某个本征态上。存在各种量子测量形式，包括正交投影测量；广义量子测量；POVM 测量；无破坏性测量；弱测量和弱值测量等。不论哪

放量子系统的控制，必须分别考虑马尔科夫开放量子系统、非马尔科夫开放量子系统和随机开放量子系统的控制。

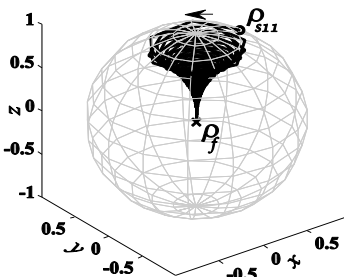
在量子态的消（退）相干与保持方面，就是保持密度矩阵的非对角元素的值保持不变：

$$\rho = \begin{vmatrix} c_1^2 & c_1 c_2^\dagger \\ c_1^\dagger c_2 & c_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho_{11} & * \\ * & \rho_{22} \end{vmatrix}$$

在开放量子系统的控制中，以非马尔科夫开放量子系统控制为例，其系统状态自由演化轨迹如图 10 所示，其中，图 10 (a) 为本征态  $\rho = |1\rangle\langle 1|$  在没有外加控制作用下的自由演化轨迹：由于耗散的作用，该状态最终退化到最大混合态：Bloch 球心；图 10 (b) 中的量子态为 Bloch 球面上的一个叠加态，同样由于耗散的作用，该状态的自由演化轨迹在来回振荡的过程中，最终退化到能量最小点球心。



(a) 本征态自由演化轨迹



(b) 叠加态自由演化轨迹

图 10 非马尔科夫开放量子系统自由演化轨迹

两组不同控制参数下，非马尔科夫开放量子系统不同状态之间的转移轨迹如图 11 所示。同样，不同控制参数可导致的状态运动轨迹的方式及其距离长短也不同。

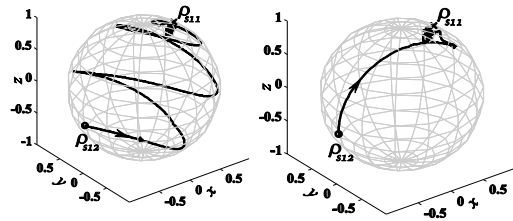


图 11 两组不同控制参数下系统不同状态之间的转移轨迹

与宏观系统跟踪控制类似，量子轨迹跟踪控制同样是量子系统中的一个很重要的控制方面。图 12 为目标态为非对角混合态情况下状态跟踪控制的演化过程<sup>[4]</sup>：一个在 Bloch 球内部的非对角混合态，在所设计的外加控制作用下，量子态沿着虚红线轨迹，跟踪上期望的蓝色实线的轨迹。其中图 12 (a) 为 Bloch 球上的轨迹图，图 12 (b) 为状态轨迹的俯视图。

量子系统反馈控制的关键点是被控状态的获取，主要的基础是：1) 量子态估计（滤波）；2) 量子纠错；所采用的方法一是基于弱测量的量子反馈控制：与辅助系统相互作用的间接测量、在线状态估计及其反馈控制；二是基于优化学习的闭环控制：离线学习，闭环控制。

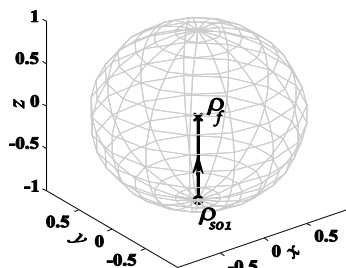
到目前为止所开发出的量子系统反馈控制理论有：1) 最优控制理论；2) 李雅普诺夫稳定性理论；3) 开关控制；4) Bang-Bang（棒棒）控制；5) 几何控制；6) 滑模控制等。采用量子系统控制理论设计量子系统控制方案的优势是：从理论上能够确保高精度达到目标；所设计出的控制律适用于高维量子系统；更加适合对复杂量子系统的控制；目前的量子系统的应用主要追求的是“成功”。将来需要追求的是在成功基础上的“高效率”和“高性能”。那时，

放量子系统的控制，必须分别考虑马尔科夫开放量子系统、非马尔科夫开放量子系统和随机开放量子系统的控制。

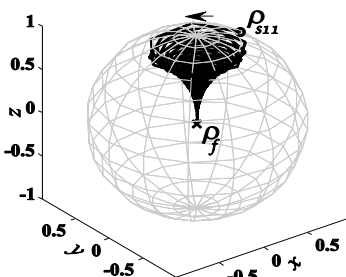
在量子态的消（退）相干与保持方面，就是保持密度矩阵的非对角元素的值保持不变：

$$\rho = \begin{vmatrix} c_1^2 & c_1 c_2^\dagger \\ c_1^\dagger c_2 & c_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho_{11} & * \\ * & \rho_{22} \end{vmatrix}$$

在开放量子系统的控制中，以非马尔科夫开放量子系统控制为例，其系统状态自由演化轨迹如图 10 所示，其中，图 10 (a) 为本征态  $\rho = |1\rangle\langle 1|$  在没有外加控制作用下的自由演化轨迹：由于耗散的作用，该状态最终退化到最大混合态：Bloch 球心；图 10 (b) 中的量子态为 Bloch 球面上的一个叠加态，同样由于耗散的作用，该状态的自由演化轨迹在来回振荡的过程中，最终退化到能量最小点球心。



(a) 本征态自由演化轨迹



(b) 叠加态自由演化轨迹

图 10 非马尔科夫开放量子系统自由演化轨迹

两组不同控制参数下，非马尔科夫开放量子系统不同状态之间的转移轨迹如图 11 所示。同样，不同控制参数可导致的状态运动轨迹的方式及其距离长短也不同。

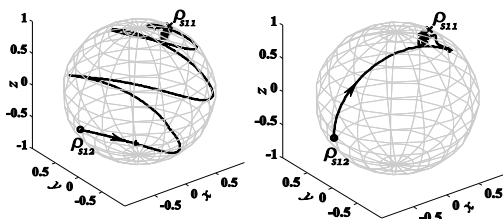


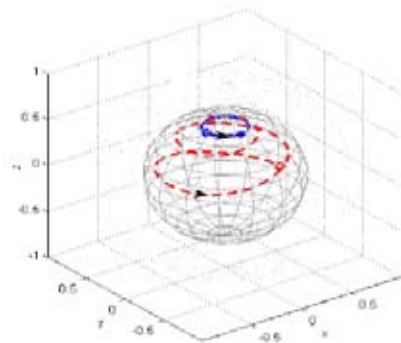
图 11 两组不同控制参数下系统不同状态之间的转移轨迹

与宏观系统跟踪控制类似，量子轨迹跟踪控制同样是量子系统中的一个很重要的控制方面。图 12 为目标态为非对角混合态情况下状态跟踪控制的演化过程<sup>[4]</sup>：一个在 Bloch 球内部的非对角混合态，在所设计的外加控制作用下，量子态沿着虚红线轨迹，跟踪上期望的蓝色实线的轨迹。其中图 12 (a) 为 Bloch 球上的轨迹图，图 12 (b) 为状态轨迹的俯视图。

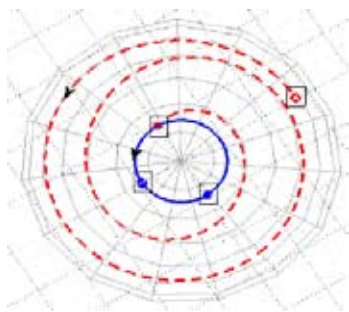
量子系统反馈控制的关键点是被控状态的获取，主要的基础是：1) 量子态估计（滤波）；2) 量子纠错；所采用的方法一是基于弱测量的量子反馈控制：与辅助系统相互作用的间接测量、在线状态估计及其反馈控制；二是基于优化学习的闭环控制：离线学习，闭环控制。

到目前为止所开发出的量子系统反馈控制理论有：1) 最优控制理论；2) 李雅普诺夫稳定性理论；3) 开关控制；4) Bang-Bang（棒棒）控制；5) 几何控制；6) 滑模控制等。采用量子系统控制理论设计量子系统控制方案的优势是：从理论上能够确保高精度达到目标；所设计出的控制律适用于高维量子系统；更加适合对复杂量子系统的控制；目前的量子系统的应用主要追求的是“成功”。将来需要追求的是在成功基础上的“高效率”和“高性能”。那时，

量子反馈控制理论及其方法将显得更加重要。



(a) Bloch 球上的轨迹



(b) 状态轨迹的俯视图

图 12 目标态为非对角混合态下的状态跟踪过程

实际上，目前量子系统研究中最困难的还是在量子系统应用的实现上，因为目前量子系统应用的物理装置上的实现主要还是根据物理基本原理：1) 基于干涉原理的相干控制：泵浦-当浦(pump-dump)的激光脉冲形状及脉冲之间时延方法；2) 激光脉冲成型技术：激光脉冲序列的设计与裁剪等。所有根据系统控制理论设计出的控制律都要通过么正演化矩阵的分解、控制律的李群分解等，才能够在具体物理装置上实现。

无论如何，目前中国的量子系统应用走在世界的前列：“墨子号”量子卫星已经上天；在首颗卫星发射成功后，还将发射多颗卫星，可以预见的是：到 2020 年将建成亚洲与欧洲的洲际量子通信网；到 2030 年左右将建成全球

化的广域量子通信网络。量子系统除了具有量子计算机、量子保密通信等应用外，还在量子精密测距、量子定位导航和量子雷达等其他方面具有广泛的应用。

希望更多的有志之士能够加入到量子系统控制的研究领域中来。

### 参考文献

- [1] 商燕, 王海涛, 隋岩, 丛爽, 双量子系统最大纠缠态制备的两种控制方法, 控制理论与应用, 2017, 34 (7): 965-973
- [2] 丛爽, 匡森 著, 量子系统控制理论与方法, 中国科学技术大学出版社, 合肥, 2013.8
- [3] K. Li, J. Zhang, and S. Cong, Fast Reconstruction of High-qubit Quantum States via Low Rate Measurements, Physical Review A., 2017 96(1), 012334
- [4] Shuang Cong, Control of Quantum Systems: Theory and Methods, John Wiley & Sons, Singapore Pte. Ltd, March 2014