《最优控制讲义》引言

——关于这本最优控制讲义想说一点事情与看法

黄琳　北京大学力学系

五十多年前，我曾经给北大数力系（现北大力学系，见图1）1958级的六年级一般力学专门化的学生开设过一门最优控制的课，当时在北京乃至国内外这样的课肯定是很稀有的。这门课所涉及的内容应是当时最前沿的，其中有一些是中国人处于国际前沿的工作，当时课后的反,映良好。于是力学专业就将此确定为一般力学专门化的课程，大体上由于这一层需要，就将上课的讲稿进行补充编成了这本最优控制理论的讲义。遗憾的是这本讲义印出来以后，我先是去农村参加四清运动并接受贫下中农的再教育，等我奉调回京以后即去国防单位从事惯性导航的研究，随后很快就爆发了文化大革命。我隐约记得这本讲义当时并未正式发给学生，也没有用来上过课，而且讲义很有可能还是散篇的，为了保存，我请人装订成了合订本。后来随着我的命运变更，先后经历了文革，武斗，搬家，内迁汉中和返回北京的多次迁徙动荡和顶住各种压力，幸而此讲义得以保存了下来。这本纸已发黄的油印讲义将作为采集工程[1]的资料保存在即将建成的中国科学家博物馆中。

最优控制国际上公认的里程碑是Pontryagin（庞特里亚金）建立的最大值原理的发表。最初这一结果是于1956年在苏联科学院院刊上发表的，随后Pontryagin以及他的学生Boltyanskii，Gamkrelidze，Mischenko以及其他学者等纷纷针对各种最优控制问题的最大值原理进行了研讨和证明，在得到很多结果和在一系列学术会议上

1 指国家科教领导小组于2010年启动的“老科学家学术成长采集工程”，由中国科协牵头实施。

报告后，Pontryagin等于1961年出版了专著（The Mathematical Theory of Optimal Control）。这一专著在1962年翻译成英文。与此同时，R. Bellman在美国基于对资源动态分配过程的研究提出了动态规划的理论与方法，后来人们发现这一方法可能更适合于对控制系统进行综合。

控制科学在20世纪60年代大发展的时期，得益于各种数学理论的支持，在六十年代针对控制而兴起的各种理论研究中，最优控制堪称是一个典范。由于问题的困难，针对最优控制的数学理论的建立一方面不得不用到很多比较高深的数学工具，另一方面这个理论并不因为数学高深而变得与应用脱节。在理论上它的证明离不开实变函数、泛函分析乃至一些拓扑学的知识，这是由问题的特征决定的，而不仅是基于数学家的兴趣，这一点有些像人们从对连续函数的认识到平方可积函数的理解。这是一种认识的飞跃，因为如果只限于讨论连续函数，那么很多数学物理问题的解决就无法自圆其说。在控制问题上也是一样。例如对控制受立方体限制时，时变线性系统的可达集均可以用只取值在立方体顶点的Bang--Bang控制就能实现这一重要结论，其证明的过程至今还是得用Lebesque可测函数等实变函数论的知识。其实就理论说来，其一个重要的任务就是在科学意义下能达到自圆其说的目的，如果科学理论本身矛盾重重无法自圆其说，就不能成其为科学。

最大值原理建立的一个主要方面正是需求推动的产物，例如钱学森先生在《工程控制论》一书中仔细谈到了Bushaw关于摆的最速制动问题，并提出了关于二阶系统最优开关线的设计。类似的问题也出现在对一个系统在加速度受限的情况下，由一个位置到另一给定位置的最佳轨迹设计问题中。在前苏联从事电力系统及随动系统研究的A. A. Fel'dbaum和A. Ya. Lerner等均从实际工程系统的角度讨论了控制量受限的快速控制问题，而Pontryagin及其学生们正是参加了Fel'dbaum的有关研讨会并受到启示而开始研究最优控制的。后来美国数学家L. W. Neustadt发表其工作时是在洛杉矶的一家航空航天公司工作，正是由于飞行器推进技术的需求，迫使他在控制受立方体限制之外再加上控制的下凸函数在整个控制时间上的积分受限，以表述飞行器所带的全部燃料受总量的约束。事实是Pontryagin的最大值原理提出以后立即推动了大量应用问题的研究，这包括飞行器轨道的最佳设计、拖动系统的最优跟踪、港口吊车吊装的路径最佳设计等众多方面，可以讲最大值原理是控制科学众多理论中来自于实际而又指导实际的理论的一个范例。能够取得这个结果的另一个重要原因是计算机能力在后来的飞速发展，和基于最优控制理论的、具有较好实用性的近似理论与算法成果的出现，而这些发展在编写这本讲义时是不可能预见清楚的，何况在这本讲义编好以后我们很快就迎来了腥风血雨的十年浩劫。

最优控制理论和其他控制理论一样，其核心思想首先在由常微分方程描述系统中形成并发展完善，然后才向其他模式的系统扩展。20世纪六十年代初正是其主要内容在常微分方程系统中基本完善而刚刚开始向别的模式扩展的时期，因而在本讲义中对不是由有限维确定型常微分方程或离散迭代方程描述的系统与问题自然不可能有所反映。就当时也是后来的有限维确定性系统最优控制的主要内容来看，从理论与方法上主要有：

首先最主要的是将变分法的思想由自变量函数选取的范围由开集向闭集进行拓展。人们一开始研究优化问题是针对函数的，人们发现一个可微函数其最大值或最小值发生的地方常常应该

是局部平的地方，即微商为零的地方，而函数在一点的微商常常是让自变量可以在不同方向上变化的，于是这种判断只对自变量在开集中变化适用，但在开集上定义的函数可能在开集里永远都取不到最大值，或取最大值的点在开集中并不存在，例如一次函数$y=\alpha x+\beta$，$0<x<1$ 就不存在极大与极小。另一方面对连续函数而言可以证明在任何闭集上均存在最大或最小，但却未必可以通过微商为零求得，这样的事情表明肯定存在最大或最小的、未必可以通过求微商的方法求得，而可以通过求微商的办法寻求极值时极值可能永远找不到。这样的矛盾状况对于函数求极值这种相对简单的问题还比较容易克服，但当问题变为自变量是函数而要解决泛函求极值的问题，可以想象一定是更为复杂同时也更具吸引力。最大值原理很完美地解决了这一问题，它对于自变量函数在开集中变化时可以导致与经典变分法同样的结果，而对于经典变分法不便处理的、在闭集上变化的问题时则提供了一个判别准则，虽然这只是一个必要性的准则，即最优控制与对应的最优过程，总使由系统与指标共同决定的Hamilton函数达到最大。但从上面的分析自然可以看出最大值原理确是一个十分重要的科学成就。

在我们充分认识最大值原理的重要意义的同时，我们也必须对它有个正确的定位，即它只是判定控制是否为最优的必要条件，自然最大值原理就不能代表最优控制的全部理论，何况这一判定还是至少在逻辑上建立在最优控制与最优过程已经知道的前提下。由于对总体上说来是最优的就一定是从局部意义说来也必定最优，自然反过来就未必成立，于是从必要条件的获得有时仅需要在最优控制的周围、有时其实是很特殊的变化范围中进行比较就能得到，这就促使使用各种特殊的变分手段推导出最大值原理的工作的出现，事实也是这样。Pontryagin提出最大值原理不久就产生出以Rozonoer为代表的一系列工作，在这些工作中可能用到的数学工具也相对容易一些，由于Pontryagin本人是研究拓扑连续变换群出身后来研究最优控制的，因而他一开始证明最大值原理就必然要用到一些相对高深的数学，而使得从事应用研究的人有些望而生畏，这也是以Rozonoer为代表的工作在控制界当时深受欢迎的原因。国内有些人以为用特殊形式的变分办法导出最大值原理是20世纪八、九十年代才出现的，实际是对这个发展历史不清楚，这可能与中国经历文化大革命产生的科学断层有关。

从常识看虽然在对一个群体的总体并不了解的情况下也可以对什么是优秀和最好提出标准与判定的条件，但人们自然更希望在对总体能有一定了解的基础上去理解什么是最优。要从总体上对系统的过程有所了解，这首先涉及到系统的模式，模式愈一般则了解一定愈空泛。这方面有几个重要的结论使得最优控制的研究获得了新的推动力，一个是当把指标泛函也当作是系统的状态而将最优提为终值最优时，系统的维数自然扩大了一维，人们发现并证明了在扩展的系统下最优的过程将总发生在对应的扩展空间中可达集的边界上，这个事实在Pontryagin最早的研究中已经基本清楚。另一个是针对线性系统，当控制受立方体限制时，Lasalle证明了全部可允控制能实现的可达集与只取立方体顶点值的Bang–Bang控制的可达集，实际上是一样大的。这两点都有力地推进了最优控制理论的研究，人们对可达集的研究兴趣还基于另一个考虑，即实现最优本身可能的困难与问题常让人希望去退一步研究次优乃至可行解，即实现可接受而非最好的要求，而要做到这一点对系统可能的可达集的了解是十分有益的。

一个没有控制的系统其过程完全由其初始

图1 北大力学系

条件唯一决定，于是在空间每个点运动轨迹只有唯一的一个切线方向，但当系统控制进入系统以后情况就发生了变化，由于控制的存在使得下一步的运动存在众多可能，此时过每一点的切线方向就呈现出切线簇的特点，而由于控制所受约束的特征，决定了这个簇实际上是一个锥，于是各种形式的锥及其特性也就成了研究最优控制理论乃至证明最大值原理的一个有力工具，这种具有明显几何特点的工具往往是在严格意义下更具几何思考空间的有效手段。

控制是这样一门科学，即在实现了自动控制以后，人们就不再企求了解在系统中发生的过程，即人们希望在系统接上控制器以后一切均按事先的提法顺利地进行下去，以这种观点看待最优控制器的设计，即要求这种控制器足以保证不论系统里发生了什么变化（当然是在一定范围内）系统中的过程都应该是最优的，这样的问题称为最优综合问题。自然能解决综合问题的系统不能太一般，至今有效的实际上还只是线性系统的某些最优问题，在这方面Bellman创立的动态规划方法起到了独特的作用。由资源动态分配的优化而发展起来的动态规划方法是基于一个无需证明的最优性原理展开的。对于最优控制问题可以推导出一种特殊的偏微分方程——Bellman方程，这类方程在最简单的常系数线性系统二次最优控制这一特定情况下，其解可以归结为代数Riccati方程的求解，而且可以有各种有效的解法，因而在控制系统的控制器设计中可以起到很好的作用。但对于比较一般的情形，这种Bellman方程的求解相当困难，甚至连解的概念也必须重新定义，例如黏性解等，而这已经是20世纪80年代或以后的事了，自然在本讲义中也不会涉及。

上面说的基本上就是我当年编写这本讲义时的主要考虑，这次将讲义正式出版原则上我没有作大的实质性改动而是作为一个历史资料留存下来，我所作的一些改动归结为：

增加了一小节Lasalle引理，以前只给出结果未给证明，由于其重要性这次将证明补了出来。

20世纪60年代是现代控制理论刚刚兴起的时候，有些科学名词还处在百花齐放没有统一的情况，从字面上可能与现在通用的概念不一致而容易引起误解，这些我做了改正并加了必要的注解。

改动了一些明显的失误，这是由于当初原稿交出后是由系里请人刻印的，刻印好后即赶上四清与文革，没有时间认真校正，一放就是半个世