



# 专家论丛

## 混杂系统介绍

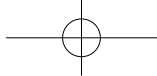
高岩 上海理工大学管理学院

### 1. 引言

复杂系统是由若干相对简单的子系统所组成，各子系统之间相互作用和影响形成了复杂系统的演化过程。子系统之间的相互作用往往是非线性和不确定性的，由此导致整个系统可能产生一些各个子系统所不具备的复杂现象。复杂系统最基本的特征是其整体突现性，或称为非加和性，即系统做为整体具有子系统或子系统之和所不具有的属性，体现在整体不等于（大于或小于）部分之和。另一方面，子系统也受到整体系统的约束和限制，其性质不能被完整地显现。近年来，复杂系统的研究引起了人们的广泛关注，但总体来讲，深入、系统地研究复杂系统的机理还只处于起步阶段，存在许多问题需要我们研究和解决。由于复杂系统的机理难于把握，针对一般的复杂系统很难获得便于直接应用的研究结果，于是分别针对每个具体类别的复杂系统进行相对深入系统的研究，以期获得实用、有效的研究结果是复杂系统研究的一个有效途径。

本文介绍称为混杂系统的一类复杂系统，对混杂系统的基本概念，应用实例做简要的介绍。

经典的动力系统按其状态的取值范围可分为两类：连续动态系统，一般用微分方程进行描述，即表示为  $\dot{x}(t) = f(x)$ ；离散动态系统，一般用差分方程来描述，即表示为  $x(k+1) = f(x(k))$ ， $k=1, \dots$ ，其中  $x \in X$ ， $x(k)$  为系统的状态， $f(x)$  为  $X$  上的向量函数， $X$  为某种空间。模型中的函数  $f(\cdot)$  反映系统的动力学特征，描述系统状态如何按照时间来变化，可以



是线性的、非线性的、甚至是非光滑或不确定的。理论上讲,对连续和离散两种系统的建模、分析、控制和优化的研究,相对比较成熟,在工程技术和社会经济管理中得到了广泛应用。

在电子通信、机械制造、社会与经济管理等领域存在这样一些复杂系统,它们具有一个共同特点:系统都是由连续演化和离散演化混合而成的复杂系统,同时连续演化和离散演化两者之间又相互作用和影响,如大规模生产线或装配线、大规模计算机与通信网络、交通管理系统等。上世纪80年代中期以来,随着科学技术的发展,特别是信息科学与技术的发展与普及,人们开始从理论上研究和处理这类复杂系统,并将其命名为混杂系统(hybrid systems)。在混杂系统的演化过程中,连续状态和离散状态之间交替演化,相互作用,使得整个系统运行在局部上表现出连续状态的动态演化,在整体上表现出在离散状态上的跳跃。具体来讲,当系统的连续状态到达某形态时,系统的状态产生一定的跳跃或模型发生转换。

混杂系统的研究之所以被人们广泛关注,一是它有广泛的应用背景,事实上大多数复杂系统几乎都包含了由连续变量所描述的物理(广义物理,例如社会经济问题)层面的动态演化过程和以符号操作与离散监控决策为表现的高层协调优化过程;二是现代计算机技术的高速发展以及智能计算方法的广泛应用,已经为处理具有混杂特性系统的建模、调控、优化与决策提供了有力的技术支持,从而保证混杂系统的研究可以直接应用于生产实际中。

## 2. 应用实例

混杂系统在现实世界中有广泛的应用,与我们的日常生产、生活密切相关,下面给出几个混杂系统的应用实例。

### 2.1 室温控制系统

室温控制系统由加热器和温度调节装置组成。系统的连续状态为室内温度,离散状态为加热器的“开”和“关”模式,此时离散状态仅取两个值,可以记其为0、1,两个离散状态分别对应于不同的连续动态过程,决定着室内温度的升降。若室内温度较设定的温度低,则打开加热器,此时室内温度处于上升过程;若室内温度较设定的温度高,则关闭加热器,此时室内温度处于下降过程。当室内温度下降或上升到预先设定的温度时,加热器在“开”和“关”两种模式间转换。温度条件装置在加热或降温两个不同的子系统间来回转换,室内温度在系统的作用下,不断在升降中交替进行。

### 2.2 交通调度系统

在城市快速路交通管理中,交通管理部门根据车流的变化对快速路入匝口采取适当的调度方式。当上游路段的交通需求大于或等于下游路段的容量时,下游已无法再容纳匝道驶入的车辆,此

时将匝道予以封闭；上游需求加上匝道需求，仍低于下游允许通过流量时，则无须管制匝道，即车辆可自由驶入快速路；介于上述两者间的状况，则宜采用匝道控制的方式，此时容许由匝道进入之流率称为调节率，等于下游允许量减上游需求之差额。当上游需求超过某一程度且进口匝道设计不良，如加速车道长度或视距不足时，则可采用汇入控制方式，保障车辆安全进入快速路。对此交通系统建立的数学模型中，通常将大量同时出现在公路上的车流量视为连续状态，将调度管理视为离散控制，入匝口的“开”和“关”视为离散状态。

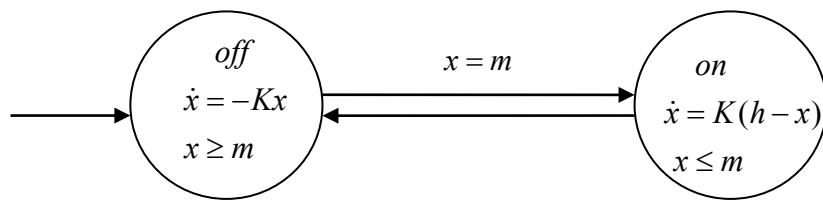


图 2.1 室温控制系统示意图

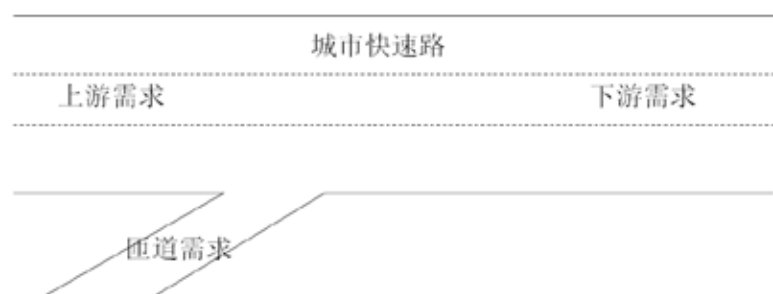
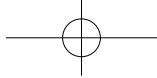


图 2.2 入口匝道流量示意图

### 2.3 电力电子系统

电力电子技术采用功率半导体器件进行功率变换、控制以及大功率电路开关的技术。由于存在功率开关管、二极管等开关元件(即有导通和关断两种工作状态的元件)，电力电子系统具有多种工作模式，不同的工作模式对应于不同的电路拓扑。随着电力电子系统中发生的事件(如某一时刻的电流或电压超过一定阈值和外部输入的改变，电力电子系统的工作模式间断地发生变化，呈现出离



散事件动态特征,其离散事件状态与系统工作模式一一对应。然而,电力电子系统中每一个电路拓扑中的状态(如电流、电压等)却随着时间和外部输入的改变连续地、动态地发生变化,体现出离散事件动态特性和连续时间动态特性相互作用,使电力电子系统呈现混杂系统的动态特征。

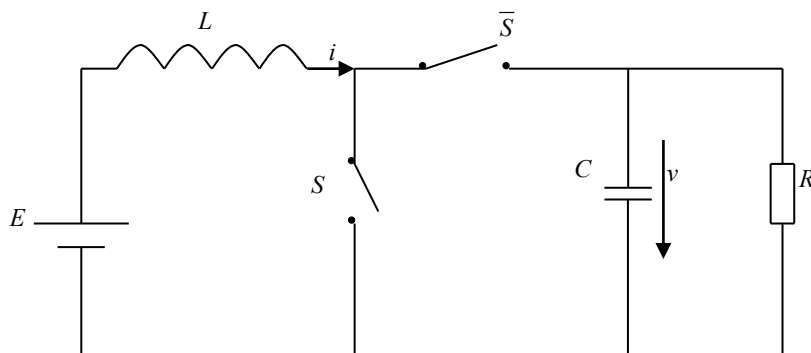


图 2.3 电路拓扑图

#### 2.4 生产线系统

机床是实施加工的主体,可对工件进行多种类型的加工,每台机床前有一个缓冲区,用以改善各机床在加工时间上的不同所造成的物流不均衡性,避免可能出现的阻塞现象。自动物料传送装置是使加工过程得以不间断运行的保障系统,计算机程序控制将待加工的工件输送到相应机床的缓冲区,再将加工完毕的工件输送到自动立体仓库。机床对工件的加工过程可用微分方程来描述,视为连续状态;加工过程中的“工件到达机床”和“工件加工完成”等事件视为离散状态,同时系统还存在着如刀具更换、设备故障、缓冲区满或空等其它离散事件,这些离散事件都可使加工活动的状态发生转移。

#### 2.5 货币供应系统

对一个国家在市场上的货币供给量,中央银行可以通过调整法定存款准备金率来进行调节。存款准备金率降低,货币的供给量将增加,反之,存款准备金率升高,货币的供给量将减少。但中央银行不可能每天都改变法定存款准备金率,而是在一定的时间间隔内,根据市场发展的需要来进行改变。因此,在一段时间内,市场上的货币供给量是连续变化的,视为连续状态;在存款准备金率改变的短时间内,市场上的货币供给量会发生突然的变化,系统状态产生跳跃。

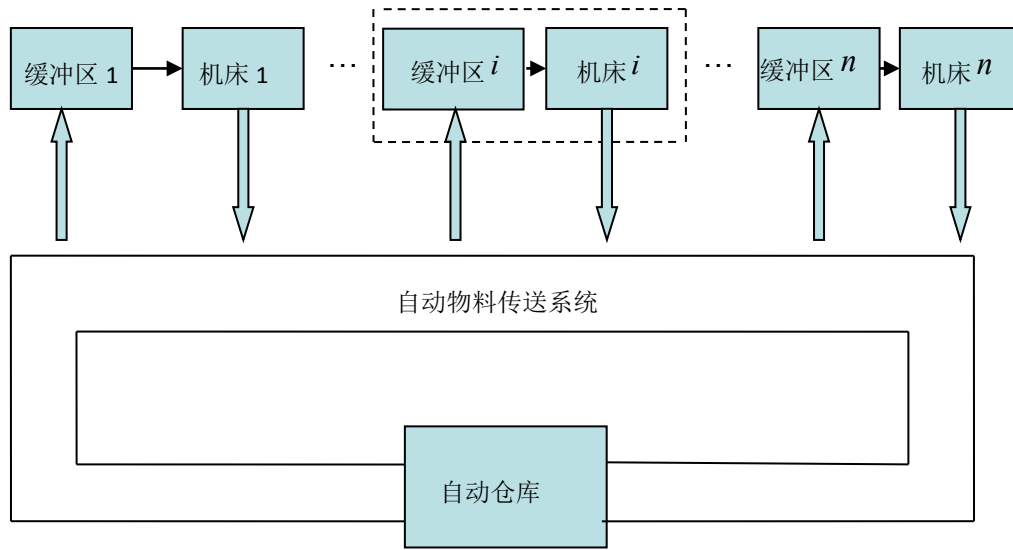


图 2.4 生产线示意

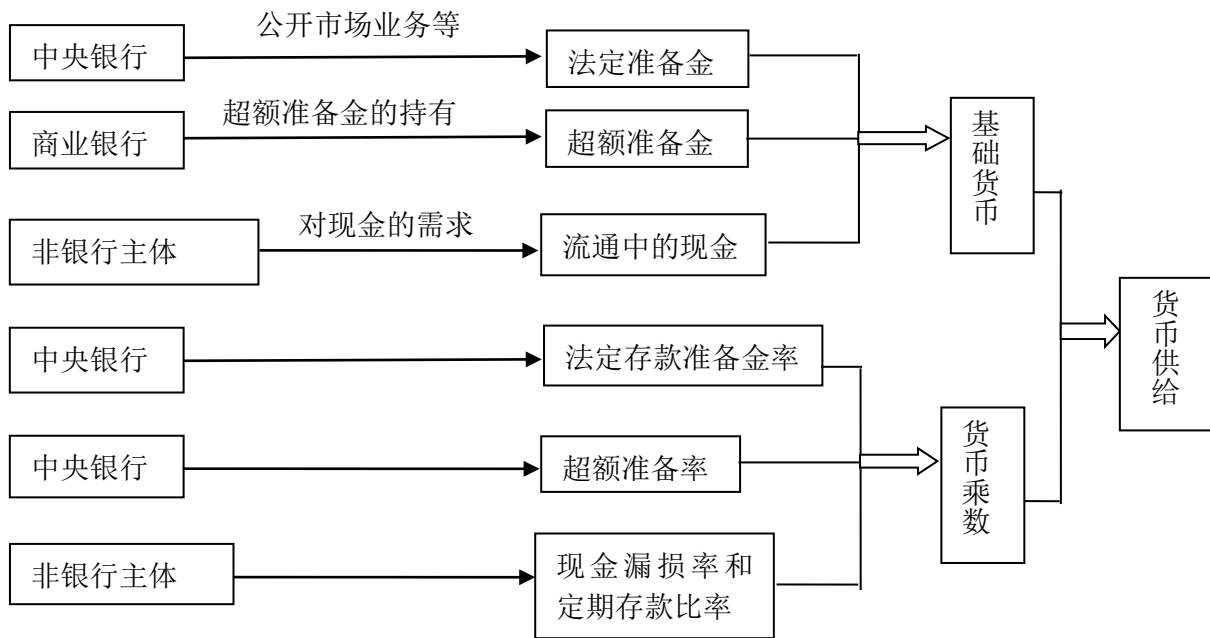


图 2.5 货币供给示意图

### 3. 概念与模型

最早对混杂系统进行研究的文献是 Witsenhausen<sup>[1]</sup>1966 年发表在 IEEE Transactions on Automatic Control 上的关于混杂状态连续时间动态系统的文章, 在该文中 Witsenhausen 对同时具有离散和连续特点的动态系统进行研究, 首次提出了“混杂”的概念。Witsenhausen 的研究开始了混杂系统理论的研究。1979 年, Cellier<sup>[2]</sup>提出了具有分层结构的混杂系统概念, 并把系统的结构分成离散事件部分、连续状态部分以及连续和离散两部分的接口三个部分, 特别将连续系统仿真方法和离散事件仿真方法结合起来, 研究了一类混杂系统的仿真问题。然而, 在 20 世纪 80 年代以前有关混杂系统的研究并未得到学者们的普遍重视, 直到 1986 年在美国 Santa Clara 大学举办的控制高峰会议上混杂系统概念才被正式提出, 此后混杂系统的研究得到了较大发展, 很快成为系统科学、控制科学、计算机科学等领域的研究热点。

混杂系统的数学描述相对比较困难, 数学模型既要描述连续状态和离散状态两部分的演化, 同时还要描述两种状态之间的相互作用和影响。另一方面, 混杂系统没有统一的数学表示, 也没有统一的分类方法, 一般分自治和非自治混杂系统、混杂控制系统和混杂状态系统、组合型和交互型混杂系统等。正是由于这些原因, 研究者均从各自的研究背景和视角对混杂系统进行定义。

下面给出一个比较简单的混杂系统模型:

$$\dot{x}(t) = f(x, u), x \notin D, \quad (1a)$$

$$x(t) \rightarrow r(t), x \in D, \quad (1b)$$

其中  $x \in \mathbf{R}^n$  是状态变量,  $0 \leq t$  是时间,  $u \in U$  是控制变量, (1a) 为系统的连续部分, (1b) 为系统的离散部分。

上述混杂系统的跳跃依赖于状态, 当状态变量在区域  $D$  以外时系统连续演化; 当状态达到区域  $D$  时系统发生跳跃。

切换系统是一种相对简单且重要的混杂系统, 其连续状态由若干个子系统分别来描述, 离散动态指切换策略, 决定某一时刻执行哪个子系统, 它控制和协调整个系统的演化, 通常依赖于时间、状态或其它信号。切换系统的一般模型为:

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x), \quad (2)$$

其中  $\{f_\sigma | \sigma \in P\}$  是一族  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  的函数,  $P$  是指标集。  $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow P$  是时间的分段常值函数, 称为切换信号, 每个  $f_\sigma(x)$  称为系统(2)的子系统, 通常情况下,  $\sigma$  的值依赖于状态、时间或其他信号。

如果各个子系统都是线性的, 切换系统则有如下形式:

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n$  为状态变量,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为常数矩阵。

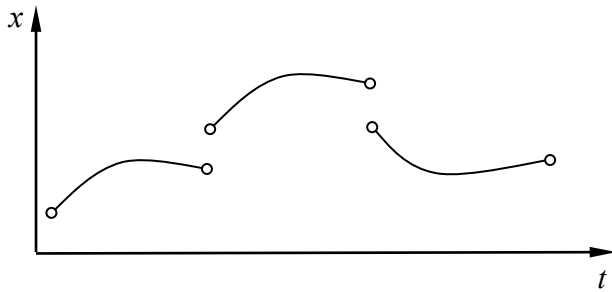


图 3.1 混杂系统

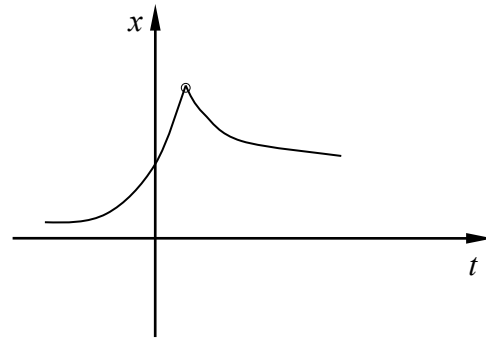


图 3.2 切换系统

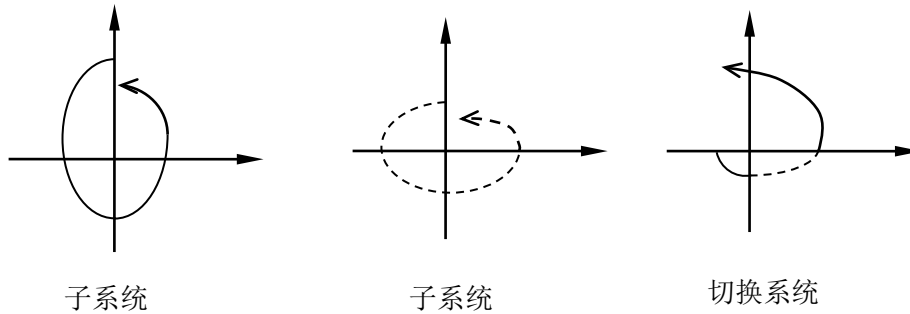
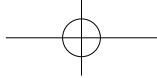


图 3.3 子系统均稳定, 整个系统不稳定



#### 4. 研究内容

由于从事混杂系统的研究人员具有不同的研究背景、研究视角和研究目的,因此研究领域也各有侧重点<sup>[3,4]</sup>。另一方面,混杂系统中有不同类型的变量和不同类型的混杂模型变化机制,这使得原有的一些经典方法和工具都不能直接用于混杂系统的研究,人们只能根据混杂系统的具体特征,依据所建立的混杂模型,分析混杂系统中离散事件和连续变量之间的内在关系。

混杂系统的研究内容概括起来有以下几个方面。

##### (1) 系统建模

该研究领域主要工作是建立混杂系统的数学模型,使其能有效描述混杂系统中的连续演化、离散事件驱动,以及两者之间的相互作用,从而有利于对系统进行有效的分析和设计。针对不同类型的混杂系统以及针对混杂系统不同的研究目的,混杂系统的模型可以有不同的数学表现形式。

##### (2) 系统分析

该领域研究对于给定的混杂系统模型与性能指标,确定模型是否满足该指标,主要包括对于给定的模型,确定性能指标满意度的必要条件或充分条件<sup>[5,6,7]</sup>。混杂系统分析包括以下几个主要方面:系统的验证、稳定性、鲁棒性、可控性、可达性、生存性以及系统的复杂度研究等。混杂系统验证是指给定混杂系统模型和性能指标,利用推理证明方法或模型检验过程,确定给定的混杂系统是否能够在一定的控制规律作用下达到给定的系统性能。

##### (3) 系统综合

与混杂系统分析不同,混杂系统综合是给定混杂系统模型和性能指标,利用一定方法找到可行的控制准则,使混杂系统在此控制准则作用下,达到所给定的系统性能指标<sup>[5,6]</sup>。

##### (4) 混杂系统优化控制

从广义上讲,混杂系统优化控制属于混杂系统综合的范畴。混杂系统优化控制是在给定混杂系统模型的基础上,依据给定的标准找到一种控制策略使给定的目标函数达到最优<sup>[5,8,9]</sup>。

##### (5) 工程应用

从工程角度来讲,实现混杂系统理论指导下的复杂工程系统的设计是混杂系统研究的最终体现<sup>[6,7]</sup>。同时,面向实际的工程和社会经济系统的应用也推动了相关理论的进一步完善和发展。因此,研究和发 展一些基于实际应用解决混杂系统的有效工具和方法将具有重要的现实意义。



## 参考文献

- [1] Witsenhausen H S. A class of hybrid-state continuous-time dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*[J]. 1966, 11(2): 161-167.
- [2] Cellier F E. Combined continuous/discrete system simulation languages—usefulness, experiences and future development[M]. In: Zeigler B P, Elzas M S, Klir G J et al (Eds). *Methodology in Systems Modelling and Simulation*[C]. Amsterdam: North-Holland, 1979, 201-220.
- [3] Branicky M S, Borkar V S, Mitter S K. A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory. *Transactions on Automatic Control*[J]. 1998, 43(1): 31-45.
- [4] Antsaklis P J, Stiver J A, Lemmon M D. Hybrid system modeling and autonomous control systems[M]. n: Grossman R L et al (Eds). *Hybrid Systems*. New York: Springer-Verlag, 1993, 366-392.
- [5] Antsaklis P J. Special issue on hybrid systems; theory and applications, a brief introduction to the theory and applications of hybrid systems[C]. *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, 2000, 88(7): 879-887.
- [6] Schaft V A, Schumacher H. *An introduction to hybrid dynamical systems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [7] Stefan K. Introduction to the Analysis and Verification of Hybrid Systems[M]. In: Engell S, Frehse G, Schnieder E (Eds). *Modelling, Analysis, and Design of Hybrid Systems*[C], Berlin: Springer-Verlag, 2002, 153-172.
- [8] Lin H, Panos J A. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of result results [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*[J]. 2009, 54(2): 308-322.
- [9] Zhu F, Antsaklis P J. Optimal control of hybrid switched systems, A brief survey[J]. *Discrete Event Dynamic Systems*, 2015, 25: 345-364.