

例说自适应控制：从倒立摆谈起

马宏宾* 张星红 周浩

北京理工大学复杂系统智能控制与决策国家重点实验室

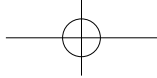
1 “适应”似变色之龙

大家熟悉变色龙是因它可以根据环境和形势的变化，通过调整自己的肤色来适应而得名。韦氏(Webster)字典指出：“适应指去改变其自身，使得其行为适合于新的或者已经改变了的环境。”苏联学者切普金(Ya. Z. Tsypkin)在《学习系统的理论基础》一书中引用了马克·吐温的一段话来说明自适应：“一只猫在烧热的灶上烫了一次，这只猫再也不敢在灶上坐了，即使这只灶是冷的。”切普金的解释强调了自适应控制系统适应过程的机械性。中国科学院院士吴宏鑫曾给记者这样科普自适应控制：“任何的控制都有被控制的对象，而对象的动力学方程及其它系数可能知道，也可能不知道，如果不知道，怎么去控制它呢？如果这个对象还会不断变化，那又该怎么控制？传统的控制方法是设计一个控制器，然后就不动了。但是如果对象发生了变化，这个控制器就必须相应的改变。而自适应就是根据对象的变化，不断地进行自身调整，从而达到时时刻刻控制对象的目的。就好比人，人就是最好的自适应控制系统，冬天知道穿上厚衣服御寒，夏天知道自己换上薄衣服，随着环境的变化，人就在不断地改变自己，自适应控制就是相同的道理。”究竟什么叫“自适应控制”？遗

憾的是这一概念至今还没有统一的定义。不过，直观上来讲，自适应调节器可以改变其自身的行为来适合于动态或环境的变化。自适应控制是“变色龙”，很形象吧！

自适应控制中的“不同的环境”和“变色”各指的是什么呢？又是如何随着“不同的环境”而“变色”的呢？所谓“不同的环境”指的是“自适应控制的研究对象是具有一定程度不确定性的系统”，这里所谓的“不确定性”是指描述被控对象及其环境的数学模型不是完全确定的，其中包含一些未知因素和随机因素。Åström曾说：“自适应控制器是具有可调节的参数和参数调节机制的控制器。”所谓“变色”指的是“调节其参数(机制)”。这样，自适应控制器应当是这样一种控制器，它能够修正自己的参数以适应对象和扰动的动态特性的变化，使整个控制系统始终获得满意的性能。自适应控制也是一种基于数学模型的控制方法，但自适应控制所依据的关于模型和扰动的先验知识比较少，需要在系统的运行过程中去不断提取有关模型的信息，使模型逐步完善。具体地说，一个自适应控制系统，应能在其运行过程中，通过不断地测取系统的输入、状态、输出或性能参数，逐渐地了解 and 掌握对象，然后根据所获得的过程信息，按一定的设计方法，作出控制决策去修正

*通讯作者: mathmhb@bit.edu.cn。本工作受国家自然科学基金(61473038)资助。



控制器的结构、参数或控制作用，模型会变得越来越准确，越来越接近于实际，以便在某种意义上，使控制达到较满意的效果。总之，自适应就是调整自己来得到满意的效果，真可谓是“变色之龙”。

2 缘起缘落缘未尽

追溯历史，在20世纪50年代，自适应控制器与不同飞行高度飞行器的控制器设计结下了良缘：飞行体控制表面的偏转所产生的力矩是速度、高度和攻角的函数，这样，飞行过程中其传递函数始终在发生很大变化，人们将经典的线性控制器应用于飞机、火箭时，并不都能得到满意的结果，后来发现其困难在于不同高度的响应特性有显著的变化，而经典的线性控制器只能与某一高度的响应特征相匹配。该背景催生了增益调度控制、MIT方案等自适应控制的思想，但未形成系统的理论。而给自适应真正名分的是1954年钱学森的《工程控制论》，在这个书中才提出了“自适应”这一专门名词。这本书引起了控制领域的轰动，赢得了国际的声誉，吸引了大批数学家和工程技术专家从事控制论的研究。一位美国专栏作家这样评论《工程控制论》：“工程师偏重于实践，解决具体问题，不善于上升到理论高度；数学家则擅长理论分析，却不善于从一般到个别去解决实际问题。钱学森则集中两个优势于一身，高超地将两个轮子装到一辆战车上，碾出了工程控制论研究的一条新途径...”。其后，在1955年 Benner 和 Drenick 也提出一个控制系统具有“自适应”的概念。

自适应控制发展的重要标志是在1958年 Whitaker 及同事设计的一种自适应飞机控制系统。1960年，Li 和 Van Der Velde 提出的自适应控制系统：控制回路中用一个极限环使参数不确定性得到自动补偿，这就是所谓的自振荡自

适应系统。Petror 等人在1963年介绍了一种这样的系统：控制输入由开关函数或继电器产生，并以与参数值有关的系统轨线不变性原理为基础来设计系统，这就是变结构系统。20世纪60年代，Butchart 和 Parks 相继提出用 Lyapunov 稳定性理论、Landau 提出用 Popov 超稳定性理论来设计自适应调节规律，针对一部分线性时不变系统给出了严格的自适应控制器闭环稳定性理论证明。

自适应控制思想诞生之初，人们对其充满热忱，在没有给出闭环稳定性的理论分析之时就大胆在实际中加以应用，导致1967年应用霍尼维尔MH-96自振荡自适应控制器的X15-3飞机出现事故，此后许多研究者不再从事这一领域的研究，这样自适应控制的发展速度趋于缓慢甚或说停顿几年，也可以说处于“缘落”期。

自适应控制虽遭受过冷落，但其“缘未尽”，由于其要解决的问题具有根本的重要性，终归还能兴起。到20世纪70年代，模型参考自适应控制和自校正调节器的涌现及成功应用使得自适应控制获得了新生。后来，一直到20世纪80、90年代，自适应控制发展进入了高潮时期，产生了一些突破性的成果，可以说自适应控制已含苞待放。

3 花开不落未归尘

最近30年以来，自适应控制这个花骨朵已经绽放，也可以用“百花齐放”、“百家争鸣”来形容，产生了很多科研成果。除了对经典自适应控制方法有进一步的深入理解外，还出现了一些新的自适应控制方法及理论，典型的包括全参数自适应控制、自调整PID控制、广义预测控制、全系数自适应控制、自校正动态矩阵控制、模糊自适应控制、自适应神经网络控制、自适应滑模控制、约束预测自适应控制、 L_1 自适应控制、自适应逆控制、动态表面自适应控制、

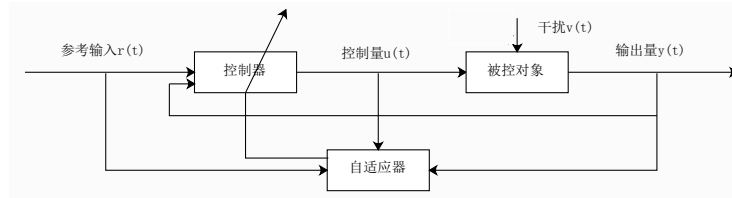


图1: 自适应系统的原理框图

自适应动态规划、半参数自适应控制、近邻补偿自适应预测控制、集合值自适应控制、自适应倒退控制、极值搜索控制、无模型自适应控制、多智能体分散自适应控制、追溯代价自适应控制等。自适应控制之所以“花开不落”，那是因为社会和科学发展的需求，同时也是因为它本身的优点。实际上在许多工程中，被控对象或过程的数学模型事先是难以确定的，即使在某一条件下能够确定下来的数学模型，若条件稍微有变动，其动态参数乃至模型的结构仍然经常会发生变化，这就需要自适应控制系统来控制。自适应系统的原理框图如图1所示。

自适应控制不但“未归尘”，目前还形成了比较成熟的理论体系，特别是模型参考自适应控制(Model Reference Adaptive Control, MRAC)和自校正控制(Self-Tuning Control, STC)已经成为两大类典型的自适应控制方法。两者的简要比较可参见表1，更多讨论参见Åström等人的经典著作。

以陈翰馥院士、郭雷院士、柴天佑院士、吴宏鑫院士、冯纯伯院士等人为代表的我国学者也在自适应控制系统的稳定性、收敛性和设计方法上做了大量的工作，为自适应控制的发展做出了突出贡献。

4 百花齐放为应用

自适应控制不是“昙花一现为韦陀”，而是“百花齐放为应用”。理论只有在实践中得以应

用，才能促进理论更好的发展。自适应控制经过几十年的发展，无论理论上还是应用上都取得了很大的发展。近20多年来，计算机技术特别是大规模集成电路和芯片的广泛普及，为自适应控制开辟了广阔的领域。

目前，自适应控制在飞行器控制、深空探测器控制、卫星跟踪系统、大型油轮控制、电子拖动、造纸过程控制、冶金过程控制、化工过程控制、水泥配料控制、大型加热炉温控制等方面得到了应用。因篇幅有限，我们只能给出部分应用和例子，但都是有图有真相。

4.1 自适应控制在航空航天中的应用

随着飞机性能不断提升，尤其是宇宙飞船的出现，航天航空领域对自适应控制的兴趣日益增加。美国宇航局(NASA)的Gupta Prasad等经过研究认为必须对基于神经网络的自适应控制器性能进行适当的监测和评估以后，才能将其安全可靠地用于现代巡航导弹控制，并给出了利用贝叶斯方法的查证和确认方法及其在NASA智能飞行控制系统中的模拟结果。在我国，自适应控制成功应用于神舟八号和天宫一号交会对接控制中，实现了接触前两航天器相对位置和相对姿态的高精度控制，对我国载人航天和交会对接的圆满成功做出了重要贡献。

4.2 自适应控制在工业生产中的应用

自适应策略在工业过程控制中获得了广泛

表 1: 自校正控制 (STC) 与模型参考自适应控制 (MRAC)

| 方法 条目 | STC | MRAC |
|----------|-------------------|---------------------|
| 基本设计思想 | 估计系统未知参数 (当作参数真值) | 调节控制器参数 (来产生理想输出) |
| 参数更新目的 | 极小化输入-输出数据拟合误差 | 极小化被控对象和参考、模型之间跟踪误差 |
| 估计控制关系 | 估计和控制分离 | 两者要结合考虑 |
| 闭环稳定条件 | 信号足够丰富 | 满足匹配条件 |
| 思想产生背景 | 随机调节问题 | 自动伺服系统最优控制 |
| 主要适用系统 | 常用于离散时间系统 | 常用于连续时间系统 |

的应用, 主要有化工过程、造纸过程、冶金过程和钢铁制造过程等等。高速稳态自适应控制技术拓展到带钢生产的头尾控制上, 提高了产品的质量和产量。袁著祉和陈增强等学者采用时变遗忘因子的鲁棒辨识算法, 在线辨识系统模型参数, 形成的广义预测自适应控制器在钢坯加热炉生产线、工业锅炉液位系统和燃烧系统、涤纶片基拉膜生产线、钻杆对焊热处理生产线等多种典型工业装置中成功应用。

4.3 自适应控制在日常生活的应用

自适应控制的应用也已渗透在我们的日常生活当中, 在街上常有踩着电动平衡车的时尚年轻人, 从我们身边潇洒而过。电动平衡车是一种两轮式左右并行布置结构的具有自平衡系统的电动车。追究其理论根据也是利用倒立摆控制原理, 使车体始终保持平衡。在车体内嵌入式CPU的控制下, 采集平衡传感器以及速度、加速度传感器的数据, 通过建立的系统数学模型和控制算法, 计算输出PWM信号, 自动控制两个伺服电机的转矩, 使车体持平衡并能够根据人体重心的偏移, 自动前进、后退及转弯, 这也是在利用自适应控制系统来控制, 不是吗?

还有日益进入大众生活的家电、汽车、机器人、无人机, 自适应控制都可在其中发挥重要

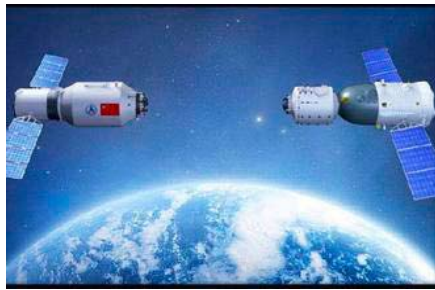
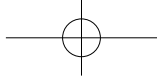
的作用。其实自适应控制应用范围之广, 可能超出我们想象, 不仅仅是上面列举的, 还有医疗设备、农用机械、智能电网等等, 在这里不再多费篇幅讨论。

5 倒 (立) 摆有缘来例说

大家有没有注意到, 机器人的关节臂和电动平衡车都是利用倒立摆的原理设计的。可应用自适应控制的模型或例子其实有很多, 本文拿倒立摆为例子, 可谓是一种缘分, 来举例说明自适应控制的思想及应用。

相信许多朋友见过, 或许有的朋友还参与过杂技顶杆或类似活动, 看似简单的表演, 里面却隐藏着自然界一种基本规律, 即一个自然不稳定的被控制对象, 通过控制手段可使之具有良好的稳定性。由此不难看出杂技演员顶杆表演 (如图3(a)) 的物理机制可简化为一个倒置的倒立摆装置, 也就是人们常称的倒立摆或一级倒立摆系统 (如图4)。倒立摆是处于倒置不稳定状态、通过人为控制使其处于动态平衡的一种摆, 是一个复杂的快速、非线性、多变量、强耦合、自然不稳定系统, 是重心在上、支点在下的控制问题的抽象。

自从倒立摆的概念被首次正式提出来之后, 倒立摆一直是控制领域及相关领域经久不衰的



(a) 神州八号与天宫一号目标飞行器交会对接

(b) 单足踩电动平衡车仍不倒

图 2: 自适应控制的几个应用



(a) 杂技演员顶水壶

(b) 农民田间顶铁锹

图 3: 生活中有趣的“倒立摆”

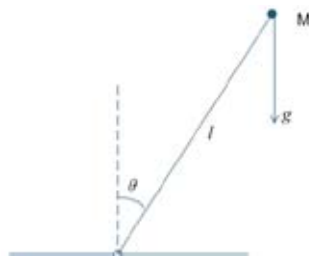
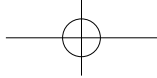


图 4: 一级倒立摆示意图



研究课题之一。倒立摆作为一个典型的不稳定、严重非线性的系统实例，常用来检验控制方法对不稳定、非线性和快速性系统的控制能力。早在20世纪50年代，麻省理工学院（MIT）的控制论专家就根据火箭发射助推器原理设计出一阶倒立摆实验设备，此后其控制方法和思路在军工、航天、机器人领域和一般工业过程中都有着广泛的用途，机器人行走过程中的平衡控制、火箭发射中的垂直度控制、卫星发射架的稳定控制、飞机安全着陆、化工过程控制以及日常生活中所见的任何重心在上、支点在下的控制问题等，均涉及到倒立摆问题。在控制过程中，它能有效地反映诸如可镇定性、鲁棒性、随动性以及跟踪等许多控制中的关键问题，是检验各种控制理论的理想模型。控制器的设计是倒立摆系统的核心内容。目前典型的控制器设计理论有PID控制、根轨迹以及频率响应法、状态空间法、最优控制理论等。倒立摆系统有两个平衡点：悬垂状态的稳定平衡点和倒立状态的不稳定平衡点。对倒立摆的控制包括摆起控制和稳定控制，摆起即将摆从稳定平衡点摆至不稳定平衡点，稳定控制即将倒立摆系统稳定在不稳定平衡点附近。

到目前为止，倒立摆已经由原来的直线一级倒立摆扩展出很多种类，典型的有直线倒立摆，环形倒立摆，平面倒立摆和复合倒立摆等，倒立摆系统是在运动模块上装有倒立摆装置，由于在相同的运动模块上可以装载不同的倒立摆装置，倒立摆的种类由此而丰富了很多。按倒立摆的结构来分，有直线倒立摆系列、环形倒立摆系列、平面倒立摆系列和复合倒立摆系列；按倒立摆的级数来分：有一级倒立摆、两级倒立摆、三级倒立摆和四级倒立摆，一级倒立摆常用于控制理论的基础实验，多级倒立摆常用于控制算法的研究，倒立摆的级数越高，其控制难度越大。目前，可以实现的倒立摆控制最高为四

级倒立摆。虽然倒立摆的形式和结构各异，但所有的倒立摆都具有以下的特性：非线性，不确定性，耦合性，开环稳定性和约束限制。

5.1 线性化的状态空间模型

我们将以倒立摆模型为例讲解自适应控制理论，换句话说，我们将用自适应控制理论的知识来分析倒立摆模型。先考察如图4所示的一级倒立摆，将牛顿定律应用于摆的运动得

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta - b\dot{\theta} + u \quad (5.1)$$

这里， θ 是角度， b 是阻尼系数， u 是控制力矩。如果考虑其在平衡点附近的运动，就可以采用 $\sin \theta = \theta$ 的近似式。令 $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$ ，则得

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} - \frac{b}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \quad (5.2)$$

我们把直接可测的 θ 作为输出变量，即 $y = x_1$ 。

5.2 应用自校正控制方法

Åström-Wittenmark 自校正调节器是种常用的自适应控制方法，这一方法基于离散时间线性回归形式的系统模型方程。为得到一个离散时间的模型，我们利用线性定常连续系统状态方程的精确离散化方法，保证状态在采样时刻，连续状态方程和离散化状态方程有相同的解。设 T 为足够小的采样周期，将方程予以离散化，遵循以下四步：

1. 求 $\Phi(T) = e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}[sI - A]^{-1}$;

2. $G(T) = \Phi(T)B$;

3. 求 $H(T) = \int_0^T e^{A(T-t)} B dt$;

4. 求 $x[(k+1)T] = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$.

依照上述四步，记 $x_k = x(kT) = [x_{1,k}, x_{2,k}]^T$ ， $u_k = u(kT)$ ，我们最终得到离散时间方程，形式为

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_k \quad (5.3)$$

$$y_k = x_{1,k} \quad (5.4)$$

这里 $a_i, i = 1, 2, 3, 4; b_j, j = 1, 2$ 没写出具体的形式。一是这里的数学表达式有点长,怕吓到大家;二是我们只是分析可利用自适应理论来控制倒立摆这一思想。

注意到这一离散时间模型中只有一个状态可以量测到,自校正调节器在此不能直接应用。所以,我们需要将上述模型转化为关于序列 y_k, u_k 的一个线性回归模型。为此,应用附录A中的技巧,我们可以写成

$$Y_k = \Phi_{k-1}\theta + \varepsilon_k \quad (5.5)$$

利用线性最小二乘解的构造公式,有

$$\hat{\theta}_k = (\Phi_{k-1}^T \Phi_{k-1})^{-1} \Phi_{k-1}^T Y_k \quad (5.6)$$

这一公式计算量大,可通过附录A中的技巧得到递推算法(5.7),其结构类似于自校正调节器中的参数递推估计算法:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + P(k-1)\phi(k-1) \left[(y(k), y(k)) - \phi^T(k-1)\hat{\theta}_{k-1} \right] \quad (5.7)$$

其中

$$\phi(k-1) = [y_k, y_{k-1}, u_k] \quad (5.8)$$

而初值 $P(0)$ 可取为一个正定的矩阵。

经过稍繁琐的计算,可得到

$$\hat{\theta}_k = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{1k}, \hat{\theta}_{2k}, \hat{\theta}_{3k} \\ \hat{\theta}_{4k}, \hat{\theta}_{5k}, \hat{\theta}_{6k} \end{bmatrix}^T \quad (5.9)$$

从而基于必然等价原则(将在线的参数估计当作参数真值来设计反馈控制),可构造出反馈控制量 u_k 使得 $Y_{k+1}^* = \Phi_k \hat{\theta}_k$,这里 Y_{k+1}^* 是 Y_{k+1} 中 y_{k+1} 替换为 y_{k+1}^* 得到的矩阵。

更进一步讨论,我们可以假定状态方程里 m, l, b 是未知的。这样的情况下,我们可以利用矩阵对应的元素相

等,求出 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ 的各自相应估计值 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ 。从而可以解出 m, l, b ,这里存在一个问题:3个未知数6个方程,但由于又是近似,6个方程有可能不相关,有可能解出 $C_6^3 = 20$ 组解,该如何解决为好呢?我们可选择再次利用最小二乘方法!联想佛教也有二小乘:声闻乘和缘觉乘,可否以此境界比拟自适应控制中最小二乘所起的作用呢?其实在这里有关 m 的解的平均数就可以作为 m 的估计值, l, b 的估计值类似!实际上有多种方法来处理物理参数的估计问题,不一定限于前述方法,但不管什么方法,线性回归形式(5.5)是应用很多离散时间自适应控制方法的基础。

5.3 应用模型参考自适应控制方法

自适应控制另一种典型方法是模型参考自适应控制,这一方法可以直接基于连续时间线性系统模型。其基本思想如下:假设被控对象的状态方程为

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \quad (5.10)$$

就前面介绍的平衡点附近倒立摆模型(5.2)来说,可取

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & a_1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

其中,参数 a_1, b_1 未知(为简化讨论,假设倒立摆摆长 l 已知,而质量 m 和阻尼系数 b 未知)。

取参考模型状态方程为

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m y_r \quad (5.13)$$

这里

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -2\sqrt{\frac{g}{l}} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

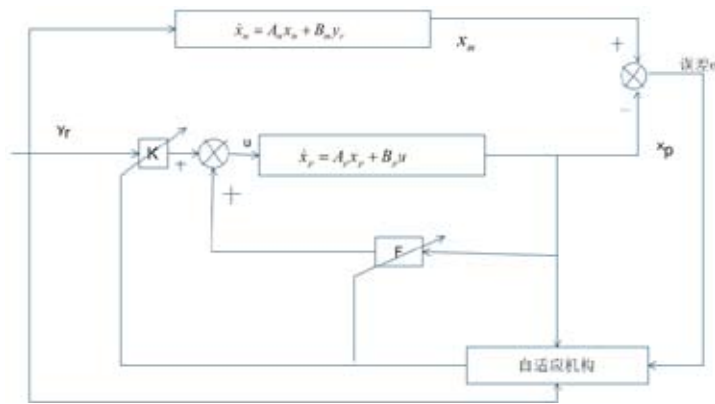
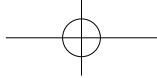


图 5: 状态变量可测时的模型参考自适应控制系统结构图

我们可采用参数可调的状态反馈控制器 F 和前馈控制器 K

$$u = Ky_r + Fx_p \quad (5.16)$$

来形成可调系统, 这里, K 为前馈控制器增益常数, $F_{1 \times 2}$ 为反馈控制器增益矩阵.

这里, 需要注意的是控制信号中需要用到实际系统的全部状态 x_p , 但不幸的是, 在实际中我们只能量测到第一个状态 (即角度 θ), 不能直接得到第二个状态 (即角度变化率 $\dot{\theta}$)。然而, 不难验证系统是能观的, 从而可构造一个降阶观测器来在线给出 x_2 的估计值 \hat{x}_2 。具体过程见附录B。这样, 控制信号中 x_p 中的未知状态 x_2 就可以用 \hat{x}_2 来代替。在状态观测器基础之上, 状态变量可认为都是可用的。我们可采用 Parks, Narendra 和 Goodwin 等人先后提出的 Lyapunov 稳定性理论来设计模型参考自适应控制系统的自适应更新律, 从而既求出了调节参数 F 和 K 的自适应律, 又确保了系统的稳定性。

将式 (5.16) 代入式 (5.10) 有

$$\dot{x}_p = (A_p + B_p F)x_p + B_p K y_r \quad (5.17)$$

当调节 F 和 K , 使 x_p 与 x_m 一致时, 模型与对象匹配, 从而有

$$A_m = A_p + B_p F^* \quad (5.18)$$

$$B_m = B_p K^* \quad (5.19)$$

其中, F^* 和 K^* 分别表示匹配时的 F 和 K 的取值, 它们也是我们希望的稳态取值。如能使矩阵 A_m 稳定 (所有特征值实部为负), 并适当构造 F 和 K 的更新律, 便可以在理论上保证系统的稳定性。

为构造 F 和 K 的自适应更新律, 定义广义状态误差

$$e = x_m - x_p \quad (5.20)$$

则有

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x}_p \quad (5.21)$$

这一式子可进一步推导为式(5.22)。

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_m e + (A_m - A_p - B_p F)x_p + (B_m - B_p K)y_r \\ &= A_m e + \frac{B_m}{K^*}(F^* - F)x_p + \frac{B_m}{K^*}(K^* - K)y_r \end{aligned} \quad (5.22)$$

令

$$\tilde{F} = F^* - F, \tilde{K} = K^* - K \quad (5.23)$$

则上式可写为

$$\dot{e} = A_m e + \frac{B_m}{K^*}\tilde{F}x_p + \frac{B_m}{K^*}\tilde{K}y_r \quad (5.24)$$

取 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \left[e^T P e + \frac{\text{tr}(\tilde{F}^T \tilde{F})}{R_1} + \frac{\tilde{K}^2}{R_2} \right] \quad (5.25)$$

这里, $P_{2 \times 2}$ 正定对称阵, R_1 和 R_2 为正常数, tr 代表矩阵的迹(trace), 即对角元素之和。

通过上述 Lyapunov 函数, 我们期望满足 $\dot{V} \leq 0$, 便可使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (5.26)$$

当 $r(t)$ 持续激励时, 可确保

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{F}(t) = 0 \quad (5.27)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{K}(t) = 0 \quad (5.28)$$

这样, 就可以保证闭环系统的全局渐近稳定性。

基于这一思想, 可构造自适应参数更新律(构造过程参见附录C)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{F}} &= -\dot{\tilde{F}} = \frac{R_1}{K^*} B_m^T P e x_p^T \\ \dot{\hat{K}} &= -\dot{\tilde{K}} = \frac{R_2}{K^*} B_m^T P e y_r \end{aligned} \quad (5.29)$$

其中取矩阵 P 满足

$$A_m^T P + P A_m = -Q \quad (5.30)$$

这里 Q 是一个正定矩阵。

因 $\dot{V} \leq 0$, 故由此确定的自适应控制律可使闭环系统稳定。值得一提的是, 参数更新律(C.6)要求用到状态 x_p 的全部信息, 这在很多实际应用场合都是有难度甚至是不可能的。针对本文所举的倒立摆例子, 由于线性化系统完全可观, 我们可以用降阶状态观测器给出的 \tilde{x}_2 来代替未知的 x_2 。关于这个倒立摆的模型, 还可以用梯度法设计的模型参考自适应控制系统的方案, 但是不易保证系统的稳定性。

行文至此, 我们已经针对倒立摆这一物理模型介绍了如何应用自适应控制中最经典的两类方法。这里不妨做个小结, 前面讨论中, 不管哪种方法, 我们事先都把模型状态方程予以线性化, 这一思想适用于相当多的非线性系统, 可见针对线性系统设计出的控制器对于非线性

系统仍可以起到重要的作用。不过, 畅想一下: 如果不线性化, 针对原本的非线性模型, 能否直接设计出保证闭环稳定的自适应控制器? 我们把这一有趣的问题留给读者去思考 and 探索!

6 有开光图有真相

前面我们对倒立摆模型进行了有关自适应控制不同方法的理论分析, 之后我们将要对倒立摆模型进行开光——仿真, 用仿真图来进一步对倒立摆模型进行剖析, 验证自适应控制理论在模型中应用的实际效果。

在式(5.1)中, 当 θ 较小时, 可取 $\sin \theta = \theta$, 将模型线性化。可表示成两种表达形式: 一种是

$$(s^2 + a_1 s + a_0) y = b_0 u \quad (6.1)$$

这里, s 表示拉普拉斯算子, y 表示输出角度, u 表示控制输入, 其中 $a_1 = \frac{b}{ml^2}$, $a_0 = -\frac{g}{l}$, $b_0 = \frac{1}{ml^2}$; 另一种可表示成状态空间, 见式(5.2)。这里选取参数 $m = 1 \text{ kg}$, $l = 0.3 \text{ m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $b = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$, 以下的控制若需要这些参数, 均采用这些数值, 不再作说明。

6.1 自校正控制仿真

采用MATLAB里的c2d函数可将式(6.1)离散化得到

$$y_{k+1} = -a'_1 y_k - a'_0 y_{k-1} + b'_1 u_k + b'_0 u_{k-1} \quad (6.2)$$

这里, a'_1, a'_0, b'_1, b'_0 是与 m, l, b, T 有关的系数。可写成

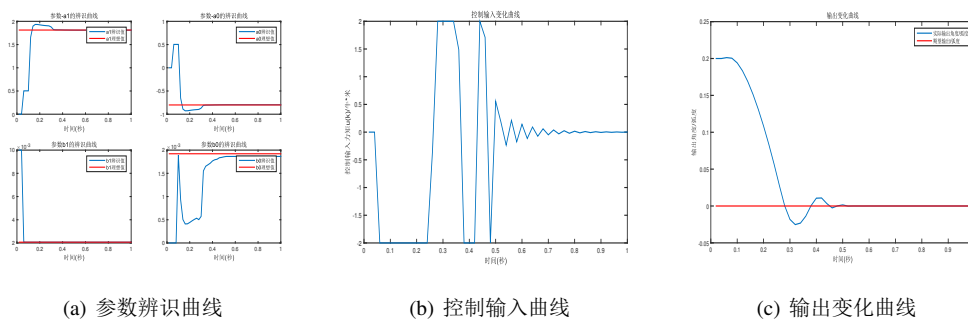
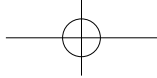
$$y_{k+1} = \theta^T \phi \quad (6.3)$$

这里

$$\begin{aligned} \theta^T &= [-a'_1, -a'_0, b'_1, b'_0] \\ \phi^T &= [y_k, y_{k-1}, u_k, u_{k-1}] \end{aligned}$$

期望输出为 $y^* = 0$, 则控制输入为

$$u_k = \frac{1}{b'_1} [a'_1, a'_0, -b'_0] [y_k, y_{k-1}, u_{k-1}]^T \quad (6.4)$$

图 6: 采样周期 $T=0.02$ 秒时自校正控制仿真结果

限制控制输入的最大幅值为 $2N \cdot m$ 。当采样周期为 $T = 0.02$ 秒时的仿真曲线如图6(a)-6(c)所示。

从参数辨识曲线图6(a)来看, a_0, a_1, b_1 的辨识值在短时间内均接近理想值, 而 b_0 与其理想值有一定的误差。这一仿真中, 参数辨识的误差平方和经过约0.6秒趋于稳定值0.045。从图6(b)来看, 控制输入曲线不到1秒的时间就趋于稳定值。从图6(c)来看, 控制输出曲线约0.5秒已接近期望值0。其实若采样周期更短, 则参数估计值越接近理想值。

6.2 模型参考自适应控制仿真

选取的参考模型为式(5.13)-式(5.15), 仿真过程中取

$$Q = I_2, R_1 = 1000, R_2 = 100, r = 0.01 \sin 2\pi t \quad (6.5)$$

得到的参数收敛误差曲线为图7(a), 参考模型和实际模型的输出角度见图7(b), 控制输入力矩曲线为图7(c)。

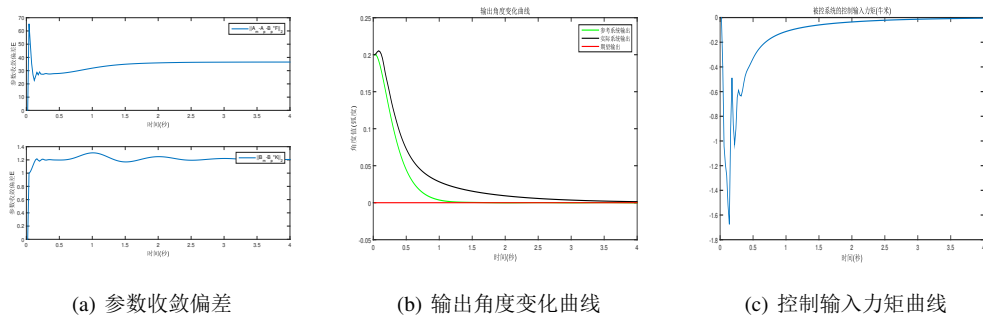
从仿真来看, 虽然参数收敛过程中仍存在一定偏差, 但最终参考系统输出、实际系统输出和期望输出基本上三线合一, 且趋于稳定值。其实若被控系统(实际系统)本身是稳定的, 通过调整参数, 会更快接近参考系统的输出。但不管

被控系统原来是否稳定, 最终都会接近参考系统输出。也可以这样说, 若事先给定的参考模型是稳定的(一般都是给稳定的), 那么不管被控系统是否稳定, 最终被控系统也是趋于稳定的。

7 天机也可泄露也

一花一世界, 一叶一菩提。自适应控制作为多学科交叉的理论, 有着辉煌但波折的过去。过去已不再提, 看看现状和未来的发展趋势。

从目前来看, 经过数十年的发展, 自适应控制这一领域可谓“百花齐放”。在理论方面, 除了已写入教科书的经典自适应控制方法, 还涌现出了自适应PID整定、非线性自适应控制(σ -修正、投影、神经网络等)、特征模型全系数自适应控制、集值系统适应控制、半参数自适应控制、分散自适应控制、有限时间自适应控制、广义预测自适应控制、预测学习自适应控制、采样自适应控制、量化自适应控制、无模型自适应控制、多模型自适应控制、 L_1 自适应控制等很多新的研究方向。在应用方面, 自适应控制方法在很多领域都得到了应用, 比如吴宏鑫院士及其团队就尝试将全系数自适应控制及特征模型自适应控制方法用于至少数十个应用领域; 还有很多领域, 特别是涉及国家重大战略需求的一些研究对象, 如高超音速飞行器、航空发动机、

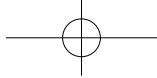
图 7: 采样周期为 $T=0.02$ 秒时模型参考自适应控制仿真结果

无人机自动驾驶仪、月球车、特种机器人、智能工业机器人、手术机器人、农用机械等, 由于所处环境、相关任务及本体结构的复杂性与不确定性, 都存在应用自适应控制的实际需求, 并将为自适应控制理论的发展提出新的挑战课题。

作为对现状的总结, 我们也要看到: 自适应控制虽然具有很大的优越性, 但在现实中, 自适应控制方法仍然远不如PID控制等方法应用得普遍。黄琳院士组织编写的中国控制理论战略报告第九章《自适应控制: 过去、现在与未来》综合了吴宏鑫院士等多位专家学者的分析, 指出了自适应控制在理论和应用方面尚存在的一些有待解决的问题, 比如工程应用中参数估计的快速收敛问题、启动过程或过渡过程的动态性能问题、测量精度—量化误差—控制精度—参数估计误差之间的相互影响问题、高频未建模动态的适应估计或补偿问题、采样适应控制的周期选择问题、受约束下适应控制的设计实现问题、自适应控制算法在实际应用中不易实现或不够可靠的问题、自适应控制策略与其他控制策略的组合设计问题等等。针对这些问题, 前面提到的一些控制方法及技术在理论上产生了较多的进展, 但以上问题仍然未能在实际应用中得到全面广泛的解决。比如: 保证自适应控制精度的前提下, 可否研究快速收敛的

估计算法, 或探索工程实用方法来快速确定参数估计的初值与计算范围, 以解决启动与过渡阶段的动态性能问题? 再如, 自适应控制方案能否在实际应用中针对系统结构与组成的分类研究加以规范化、系统化, 提出具有一定通用性的控制模型, 增加系统的开放性与可移植性, 减少甚至取消现场调试? 再如, 自适应控制策略可否与其他控制策略进行有机组合来有效处理实际应用中的一些工程问题?

从长远来看, 会出现一些较系统的新型自适应与多个相关学科产生深度融合交叉的理论体系; 同时自适应控制会在更多领域得到较好的应用, 某些领域可能获得大规模应用, 出现通用的、模块化的、可定制的(商业化)自适应控制器。但是由于自适应控制问题的高度复杂性, 一些自适应控制方法闭环稳定性的理论证明还具有很大的难度, 仍需要学者和专家从理论研究和工程实际应用两个方面继续努力。此外, 自适应控制历经数十年的发展, 虽有很大进展, 但从某种意义上说这一领域与近二十年发展起来的非线性系统辨识、非线性非高斯系统滤波技术、随机优化与学习、滚动时间窗预测学习、现代时间序列分析等技术的深度融合还非常缺乏, 目前的实现还很少利用到并行计算或高性能计算技术、网络通信技术、云计算技术、数据挖掘等新兴的现代信息技术。



我们的生活已经进入“智能时代”，智能已无处不在，汽车上的自适应巡航系统、自适应前照灯系统等先进技术无处不在提示我们“自适应”的优越性。未来，自适应控制的发展有着广阔的空间，必将在工业、计算机、通信、机器人、生物、国防、医疗等领域中得到深层次的发展应用，更加展现出其先进性、智能性、多样性、融合性、普遍性。借助学科不断交叉融合的

东风，互联网、大数据、云计算、工业4.0、智能制造等新的技术与概念，或将深刻影响自适应控制这一传统研究领域。因此，有理由相信，随着自适应控制理论及应用不断的发展，我们的生活将会变得越来越便利，未来的世界将因“适应·智能”而更加美好！天机或可泄露：

若论适应控制，前景未可估量；
谁说老树已死，且看新花绽放！

附录A 如何估计回归模型参数

注意到式(5.2)状态变量 x_2 和 x_1 的导数关系，我们用有关 x_1 的差分来代替 x_2 ，即

$$x_2((k+1)T) \approx \frac{1}{T}[x_1((k+1)T) - x_1(kT)],$$

而产生的计算误差和观测的误差将一并考虑。我们可得式(A.1)和式(A.2)给出的近似模型：

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{1,k+1} - x_{1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \frac{1}{T}a_2 \\ Ta_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{1,k} - x_{1,k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ Tb_2 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} \epsilon_{1,k+1} \\ T\epsilon_{2,k+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$y_k = x_{1,k} \quad (\text{A.2})$$

其中 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ 均与 m, l, b, T 有关。

将式(A.2)代入式(A.1)得到如下方程组：

$$\begin{cases} y_{k+1} = \left(a_1 + \frac{a_2}{T}\right)y_k - \frac{a_2}{T}y_{k-1} + b_1u_k + \epsilon_{1,k+1} \\ y_{k+1} = (Ta_3 + a_4 + 1)y_k - a_4y_{k-1} + Tb_2u_k + T\epsilon_{2,k+1} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

对任意的 $k \geq 0$, 定义

$$Y_{k+1} = \begin{bmatrix} y_2, y_3, \dots, y_{k+1} \\ y_2, y_3, \dots, y_{k+1} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.4})$$

$$= [Y_k^T, (y(k), y(k))^T]^T \quad (\text{A.5})$$

$$\phi(k-1) = [y_k, y_{k-1}, u_k]^T \quad (\text{A.6})$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} y_1 & y_0 & u_1 \\ y_2 & y_1 & u_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_k & y_{k-1} & u_k \end{bmatrix} = [\Phi_{k-1}^T, \phi(k-1)]^T \quad (\text{A.7})$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 + \frac{a_2}{T}, & -a_1, & b_1 \\ T a_3 + a_4 + 1, & -a_4, & T b_2 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.8})$$

$$\varepsilon_k = \begin{bmatrix} \epsilon_{1,2}, & \epsilon_{1,3}, & \dots, & \epsilon_{1,k+1} \\ T \epsilon_{2,2}, & T \epsilon_{2,3}, & \dots, & T \epsilon_{2,k+1} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.9})$$

下面我们将简要推导估计值的递推式(5.7)。令

$$P(k-1) = (\Phi_{k-1}^T \Phi_{k-1})^{-1} \Phi_{k-1}^T \quad (\text{A.10})$$

将 Φ_{k-1} 展开, 有

$$\begin{aligned} P(k-1) &= [\Phi_{k-2}^T \Phi_{k-2} + \phi(k-1)\phi^T(k-1)]^{-1} \\ &= [P^{-1}(k-2) + \phi(k-1)\phi^T(k-1)]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

利用矩阵的反演公式 (设 A 和 C 为可逆方阵):

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (\text{A.12})$$

我们可得关于 $P(k)$ 的迭代式:

$$P(k-1) = \left[I - \frac{P(k-2)\phi(k-1)\phi^T(k-1)}{1 + \phi^T(k-1)P(k-2)\phi(k-1)} \right] P(k-2) \quad (\text{A.13})$$

由式(5.6), 我们可得

$$P^{-1}(k-1)\hat{\theta}_k = \Phi_{k-1}^T Y_k \quad (\text{A.14})$$

再结合反演公式(A.12), 我们就得到了式(5.7)。

附录B 如何设计状态观测器

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} - \frac{b}{ml^2} & \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \quad (\text{B.1})$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (\text{B.2})$$

其中, x_2 是不能直接量测的变量, 但经验证该系统是可观的, 因此可设计一状态观测器来重构状态。可考虑新的状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{b}{ml^2}x_2 + \left(\frac{g}{l}x_1 + \frac{1}{ml^2}u\right) \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

降阶观测器模型

$$\dot{\hat{x}}_2 = \left(-\frac{b}{ml^2} - L\right)\hat{x}_2 + \frac{g}{l}x_1 + \frac{1}{ml^2}u + L\dot{x}_1 \quad (\text{B.4})$$

引进记号

$$\begin{aligned} x_2 - Ly &= x_2 - Lx_1 = w \\ \hat{x}_2 - Ly &= \hat{x}_2 - Lx_1 = \hat{w} \\ -\frac{b}{ml^2} - L &= \hat{A}, \hat{A}L + \frac{g}{l} = \hat{B}, \hat{F} = \frac{1}{ml^2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

则降阶观测器模型是

$$\begin{cases} \dot{\hat{w}} = \left(-\frac{b}{ml^2} - L\right)\hat{w} + \left[\left(-\frac{b}{ml^2} - L\right)L + \frac{g}{l}\right]y + \frac{1}{ml^2}u \\ \hat{x}_2 = \hat{w} + Ly \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

因此, 状态 x 的估计可由下式给出

$$\hat{x} = - \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{w} + Ly \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{w} + \begin{bmatrix} 1 \\ L \end{bmatrix} y \quad (\text{B.7})$$

附录C 如何构造参数更新律

在式 (5.25) 两端对 t 求导

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \left[(\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) + \frac{2 \operatorname{tr}(\dot{\tilde{F}}^T \tilde{F})}{R_1} + \frac{2 \dot{\tilde{K}} \tilde{K}}{R_2} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\dot{e}^T (A^T m P + P A_m) e] + \frac{e^T P B_m \tilde{F} x_p}{K^*} + \frac{e^T P B_m \tilde{K} y_r}{K^*} + \frac{\operatorname{tr}(\dot{\tilde{F}}^T \tilde{F})}{R_1} + \frac{\dot{\tilde{K}} \tilde{K}}{R_2} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

式 (C.1) 最右端的第二项和第三项是常数, 根据矩阵迹的性质

$$x^T Ax = \text{tr}(xx^T A), \text{tr} A = \text{tr} A^T$$

有

$$\frac{e^T P B_m \tilde{F} x_p}{K^*} = \frac{\text{tr}(x_p e^T P B_m \tilde{F})}{K^*} \quad (\text{C.2})$$

因 A_m 为稳定矩阵, 则可选正定对称阵 Q , 满足

$$A_m^T P + P A_m = -Q \quad (\text{C.3})$$

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}(e^T Q e) + \left(\frac{\text{tr}(x_p e^T P B_m \tilde{F})}{K^*} + \frac{\dot{\tilde{F}}^T \tilde{F}}{R_1} \right) + \left(\frac{\text{tr}(y_r e^T P B_m \tilde{K})}{K^*} + \frac{\dot{\tilde{K}} \tilde{K}}{R_2} \right) \quad (\text{C.4})$$

令式 (C.4) 右端的第二项和第三项为零, 则有

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{F}} &= -\frac{R_1}{K^*} B_m^T P e x_p^T \\ \dot{\tilde{K}} &= -\frac{R_2}{K^*} B_m^T P e y_r \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

根据 F 和 K 的定义, 考虑 F^* 和 K^* 不变, 从而有

$$\begin{aligned} \dot{F} &= -\dot{\tilde{F}} = \frac{R_1}{K^*} B_m^T P e x_p^T \\ \dot{K} &= -\dot{\tilde{K}} = \frac{R_2}{K^*} B_m^T P e y_r \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

也可以写成积分形式

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t \left(\frac{R_1}{K^*} B_m^T P e x_p^T \right) dt + F(0) \\ K(t) &= \int_0^t \left(\frac{R_2}{K^*} B_m^T P e y_r \right) dt + K(0) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

这里, $F(0)$ 和 $K(0)$ 为初始值。我们知道 B_p 是未知的, 于是 K^* 难以确定, 但是考虑到 R_1 和 R_2 有一定的随意性, 所以有

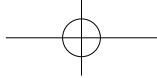
$$\bar{R}_1 = \frac{R_1}{K^*} \quad (\text{C.8})$$

$$\bar{R}_2 = \frac{R_2}{K^*} \quad (\text{C.9})$$

这里, \bar{R}_1 和 \bar{R}_2 都是常数, 应根据实验确定, 从而有

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t (\bar{R}_1 B_m^T P e x_p^T) dt + F(0) \\ K(t) &= \int_0^t (\bar{R}_2 B_m^T P e y_r) dt + K(0) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

为适应参数调节律。



参考文献

- [1] 袁震东. 自适应控制理论及其应用. 华东师范大学出版社, 上海, 1986.
- [2] 科技日报. 耐住寂寞 守得云开——记我国控制专家, 镇江籍中国科学院院士吴宏鑫. 2015.
- [3] 促继光, 魏炜. 钱学森的数学观. <http://www.docin.com/p-386279180.html>, 2011.
- [4] Astrom K J. History of adaptive control. In J. Baillieul and T. Samad, editors, *Encyclopedia of Systems and Control*, pages 526–532. Springer-Verlag, London, 2015.
- [5] Astrom K J and Wittenmark B. *Adaptive Control*. Addison-Wesley, Reading, MA, 2nd edition, 1995.
- [6] 柴天佑. 多变量自校正前馈控制器及其应用. *自动化学报*, 1986, 12(3): 229–236.
- [7] Chen H F and Guo L. *Identification and Stochastic Adaptive Control*. Birkhäuser, Boston, MA, 1991.
- [8] 吴宏鑫. 全系数自适应控制理论及其应用. 国防工业出版社, 北京, 1990.
- [9] 冯纯伯. 自适应控制的理论及应用. *控制理论与应用*, 1988, 5(3): 1–12.
- [10] 桂林红豆网. 神舟八号与天宫一号完成交会对接.
- [11] 中国创业网. 冰贝尔电动平衡车.
- [12] 西安轩成演艺文化传播有限公司. 杂技演员如何进行顶杆表演? .
- [13] 人民网. 走进中国杂技之乡: 杈耙锄头当道具 田间地头练杂技.
- [14] 程代展, 夏元清, 马宏宾, 闫利萍. 矩阵代数、扩展与博弈, 页码: 9–70. 北京理工大学出版社, 2015.
- [15] 模型参考自适应控制系统的分析.
- [16] Hovakimyan N and Cao C. *L1 Adaptive Control Theory: Guaranteed Robustness with Fast Adaptation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2010.
- [17] 赵延龙、张纪峰、郭金. 集值系统的辨识与适应控制. *系统科学与数学*, 2012, 32(10): 1257–1265.
- [18] Ma H B and Lum K Y. Adaptive estimation and control for systems with parametric and nonparametric uncertainties. In *Adaptive Control*, Chapter 2, pages 15–64. I-Tech Education and Publishing, Vienna, Austria, January 2009.
- [19] H. B. Ma. Decentralized adaptive synchronization of a stochastic discrete-time multi-agent dynamic model. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2009, 48(2): 859–880.
- [20] Adetola V and Guay M. Finite-time parameter estimation in adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2008.
- [21] Guillaume A M, Bastin G, and Campion G. Sampled-data adaptive control of a class of continuous nonlinear systems. *International Journal of Control*, 1994, 60(4): 569–594.
- [22] Hayakawa T, Ishii H, and Tsumurac K. Adaptive quantized control for nonlinear uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(9): 625–632.
- [23] 控制理论战略研究组. 控制理论发展战略研究报告, 页码: 119–134. 中国科学院信息技术科学部, 2013. (马宏宾、陈增强执笔, 张纪峰审校)