专家论丛

混沌浅释

陈立群
上海大学力学系

混沌(chaos)在古希腊、古罗马、希伯来和华夏等诸多文明中，都是表示天地开辟前的元气状态，或者这种状态的神格化。如古希腊赫西俄德的《神谱》开篇第一句便是："最先到来的是混沌。"人文大师庄子、但丁、莎士比亚、歌德等和科学大师牛顿等都在这个意义上用过"混沌"一词。肇始于上世纪初、兴盛于 20 世纪 70、80 年代的非线性动力学研究热潮，给"混沌"这个古老的词汇注入丰富的科学内涵，相关研究成为数学、物理、力学、控制理论等诸多学科的热点。随着研究的深入和广泛，混沌理论的部分内容成为人类知识大厦中的砖瓦臻于成熟，部分内容演化为新的学术增长点。这个过程，如苏东坡《与侄书》所谓"气象峥嵘，彩色绚烂。渐老渐熟，乃造平淡。其实不是平淡，绚烂之极也。"经过混沌研究热潮的洗礼，人们已经认识到，混沌是非线性系统的基本性质。本文拟从不同角度通俗地解释混沌概念。

一、 从气象预报谈起：蝴蝶效应

巴比伦、希腊和华夏诸文明中，人们在公元前数百年就尝试预测天气。直到上世纪 20 年代，人们才开始基于数值计算而不仅是经验和气象观测记录来预报天气。电子计算机的发明，使得人们对于天气预报有非常乐观的预期。"计算机之父"冯・诺依曼（John von Neumann, 1903-1957）在 20 世纪 40 年代坚信，人们能够通过数值求解偏微分方程，实现长期天气数值须报，甚至最终达到控制气候。

尽管有诸多学者的不懈努力，长期天气预报的问题并没有得到解决。即使计算机的能力大为提升，仍然是"天有不测风云"（宋人吕蒙正《破窑赋》开篇首句）。"控制论之父"维纳

（Norbert Wiener, 1894-1964）对其中的原因进行了深入思考。在 1956 年发表的一篇会议论文《非线性预测和动力学》[1]中，维纳指出是一些微小的局部扰动，使得天气的长期性态有显著改变。并引用一首童谣，作为气象学的一个生动例子：

少了一个钉子，失掉了马蹄；

少了一个马蹄，失掉了战马；

少了一匹战马，失掉了骑士；

少了一位骑士，失掉了战役；

失败了场战役，失掉了王国。

维纳领悟了长期天气预报的本质困难——系统对扰动的敏感性。随便一提，维纳也是较早在科学文献中使用“混沌”一词的学者，他分别在 1938 年和 1942 年发表了论文《各向同性混沌》和《离散混沌》，但其中混沌的含义并不是本文所述对初值敏感性的描述。

学习应用数学出身的气象学家洛伦兹（Edward Norton Lorenz, 1917-2008）也在研究长期天气预报的可能性问题。1963 年，他发表了论文《确定性非周期流》[2]。他基于一个大气热对流的简化模型（现在称为洛伦兹方程），发现了完全确定性的方程中出现了非周期解，“微小差别的初始条件能演化成显著不同的状态”。由此，洛伦兹推断，“由于天气观测中不可避免的不精确和不完全，非常长期的准确天气预报似乎不存在。”后来，洛伦兹将这种由于初态敏感性而具有的不可长期预测性形象地称为蝴蝶效应。1972 年他在会议报告《预测性：在巴西一个蝴蝶拍动翅膀能在德克萨斯产生龙卷风吗？》[3]中说到，一个蝴蝶的振翅，导致大气状态极微小的变化，但在几天后，千里之外的一场本来没有的大风暴发生了。蝴蝶效应是混沌的生动描述。

二、 一个混沌算例：虫口模型

为了让读者对前述初值敏感性有直观的切身感受，我们先进行一个简单计算。计算对象为二次迭代映射

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \tag{1}$$

其中取 $r=4$。给定一个初始值 x_0，就可以计算后续的 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$ 。选择第一个初始点为 $x_0=0.1$，另两个初始点分别与 0.1 相差亿分之一和千万分之一（绝对差别，相对差别是 0.1 的千万分之一和百万分之一），即 $x_0=0.100,000,01$ 和 $x_0=0.100,000,1$。对 3 个有微小差别的初始值，保留了 10 位有效数字的前 50 次的部分结果如表 1 所示。

表 1 二次迭代映射(r=4)对不同初值的迭代结果

n	x_n	x_n	x_n
0	0. 100, 000, 000, 0	0. 100, 000, 010, 0	0. 100, 000, 100, 0
1	0. 360, 000, 000, 0	0. 360, 000, 003, 2	0. 360, 000, 032, 0
2	0. 921, 600, 000, 0	0. 921, 600, 035, 8	0. 921, 600, 358, 4
3	0. 289, 013, 760, 0	0. 289, 013, 639, 1	0. 289, 012, 551, 2
…	…	…	…
10	0. 147, 836, 559, 9	0. 147, 824, 444, 9	0. 147, 715, 425, 1
…	…	…	…
50	0. 277, 569, 081, 0	0. 435, 057, 399, 7	0. 973, 249, 588, 2
51	0. 802, 094, 386, 2	0. 983, 129, 834, 6	0. 104, 139, 309, 1
52	0. 634, 955, 927, 4	0. 066, 342, 251, 5	0. 373, 177, 253, 6
…	…	…	…

从表 1 中列出的计算结果看，最前面几步迭代后初值的微小差别仅导致结果的很小差别。第 3 步迭代后，亿分之一的初始差别导致结果差别在千万分之一量级上，千万分之一的初始差别导致结果差别在百万分之一量级上。到第 10 步时，迭代的差别已经分别变为十万分之一量级和万分之一量级。这个差别不算很大，但已经比初始误差放大了约 100 倍。继续进行迭代，到第 50 步时，误差已经在十分之一量级，与迭代值在同一量级。此时及其随后的迭代中，从 3 个初值迭代的结果变得似乎不相关，完全看不出都是初始差别只是亿分之一和千万分之一。这个计算结果展现了混沌的基本特征，对初始条件的敏感依赖性，即初始值的微小差别经过一定时间后可导致系统动力学行为的显著差别。

从表 1 中的数据还可以看出，迭代的结果从不重复，混沌具有非周期性。周期性是指系统的动力学行为间隔一段时间后就会重复出现。非周期性就意味着系统的动力学行为不再重复。非周期性有两种极端的情形，一种是运动幅度越来越大，这样当然不会重复；另一种是运动停止，也就不能重复了。混沌运动的非周期性不同于这两种情形，是一种有界的非周期性，或者说是往复的非周期性。二次迭代映射的计算过程中，始终没有进入任何循环，同时也没有停止不动或趋于无限大，因此呈现了往复非周期性。混沌这种往复非周期性导致迭代结果的变化看上去似乎无任何规律可循。不像是确定性系统的动力学行为，而完全类似于随机噪声。值得注意的是，这种类似随机的过程产生于完全确定性的系统。因此，称混沌具有内禀随机性，

也称作自发随机性。

混沌的初值敏感性导致了混沌的另一特征，长期预测的不可能性。现实中的任何量都只能以有限精度表示，无穷高精度在物理世界中不存在。因而初值中存在不确定因素。例如，上述二次迭代初值的确定，就是有效数字取 100 位，计算机处理时，第 101 位还是随机地取 0 到 9 中的一个。具有初态敏感性的系统对于初值误差的作用不断进行放大。随着时间的流逝，初始条件中的不确定因素起着愈来愈大的作用。一段时间之后决定运动的已不是初始条件中以有限精度给定的部分，而是在精度范围之外无法确定而又必然存在的误差，运动的预测便不可能了。例如，如果上述模型中初值误差是亿分之一，到第 50 次迭代后，起作用的是十亿分之一或者更后面的位数。可预测的时间长度取决于初始条件的精度，这又有别于完全不可预测的真正随机过程。

式(1)定义的二次映射称为虫口模型，其生态学意义是昆虫数量的代际变化。正是在对生物数量的研究中，梅(Robert M. May, 1936-)首次在表示初值敏感性和非周期性这个意义上使用了“混沌(chaos)”一词，见他 1974 年发表在《科学》上的论文《无代际重叠的生物数量：稳定点，稳定环和混沌》[4]一文中。梅在文中指出是约克（James A. Yorke,1941-）首先用“混沌的(chaotic)”表示这种非周期性的变化。事实上，是李天岩（Tien-Yien Li,1945-）和其导师约克在当时尚未发表的论文中用了“混沌的”一词，他们的论文《周期 3 意味着混沌》[5]在 1975 年才发表。

三、 进入混沌的路径：倍周期分岔

虫口模型这个貌似简单的模型，展示了混沌许多本质特性。除了上述计算揭示的初值敏感性外，还可以说明系统随着参数变化而进入混沌的途径。理论分析和直接计算都表明，若 $r<1$，从任何初值开始的迭代，最终都趋于 0，称为零不动点。若 $1<r<3$，非零初值的迭代，都趋于非零不动点 $1-1/r$。若 $3<r<1+\sqrt{6}$，从非零且不为 $1-1/r$ 开始的迭代，都趋于两个值 $\frac{1+r}{2r}\mp\frac{1}{2r}\sqrt{(r+1)(r-3)}$ 之一。迭代的结果在这两个值之间变化，两个值称为周期-2 点。周期-2 点就像两个足球运动员的传球配合，你来我往。进一步增加 r，还会有周期-4 点，周期-8 点等。更高的周期点，就像多个运动员的传球配合。

继续增大，最后就没有任何周期点，迭代结果不呈现周期性变化，就是前述具有初值敏感性的混沌。整个过程如图 1 所示。对于给定的参数 r，图上有限个分离的点对应着周期点，因为多次迭代后的结果就是这几个点，点的个数就是周期数；不是有限点而是连续的竖线就是混沌，这时候迭代的结果没有规律的变化。这种相继出现周期倍化的周期点最终进入混沌的过

程，称为进入混沌的倍周期分岔路径。倍周期分岔开始几步，正好与《易传·系辞上》的说法类似，“《易》有大极，是生两仪。两仪生四象。四象生八卦。”

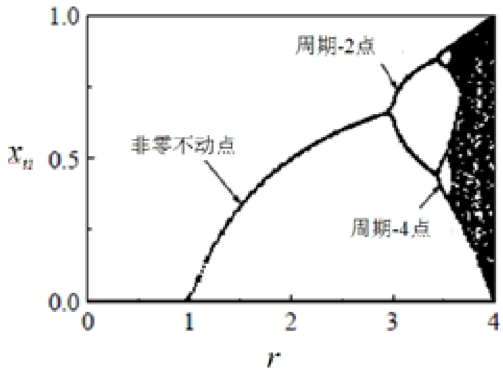

图 1 虫口模型中的倍周期分岔

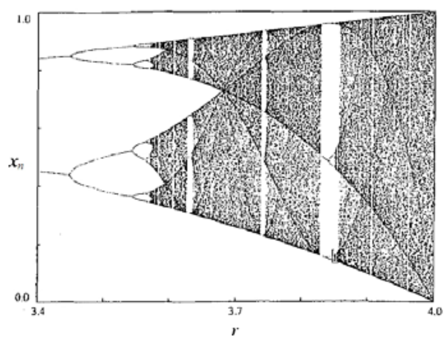

图 2 图 1 的局部放大

倍周期分岔进入混沌的路径不仅存在于虫口模型中，也存在于一切单峰映射(即在迭代区间上只有一个极大值)中。1978 年，费根鲍姆在其论文《一类非线性变换的定量普适性》[6]中报道了他自己的惊人发现，单峰映射的倍周期分岔的分岔值λk (k=1,2,…)间距之比的极限为一个常数

$$\delta = \lim_{m\to\infty}\frac{\lambda_m-\lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1}-\lambda_m} = 4.669201609102990671853204... \qquad (2)$$

每个分岔的高度之比的极限也为一个常数

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_{n+1}} = 2.502907875095892822283902 5... \qquad (3)$$

这两个常数与单峰映射的具体表达式无关，因此具有普适性。

单峰映射有广泛的应用。例如，洛伦兹在其论文《确定性非周期流》[2]中，就是用一种成为庞卡莱映射的数学技巧，将洛伦兹方程归结为单峰映射。庞卡莱(Henri Poincaré，1854-1912)在混沌的数学机制和概念阐述等方面都有开创性的贡献，是混沌理论的开创者，现代非线性动力学的奠基人。

四、 一个混沌系统：双摆

混沌的非周期性和初值敏感性，可以用两个完全相同的由两根摆杆构成的双摆来演示。

在不同的初始条件下，双摆既可以呈现周期运动，也可以呈现混沌运动。例如，双摆的两根摆杆都稍微偏离其稳定平衡位置(铅垂且重心在最低位置)，两根摆做周期运动或者准周期运动；即使偏离平衡位置较大甚至很大，如两根摆杆同相位在水平位置上自由释放，仍然是做周期运动。但若把两跟摆杆反相位置于水平位置，如图 3a 所示，释放后，上面的摆杆仍是左右摆动，但下面的摆杆可以左右摆动，也可能顺时针或者逆时针旋转，转动没有任何规周期，是混沌。如果把两根摆杆想象为双节棍，混沌运动的摆杆的打击不可预测，因此更有威胁。武侠小说中常说 “无招胜有招”。有招就是周期运动，不论招式有多么复杂的套路，实施完了就要从头再来；而无招就是混沌，没有重复因此不可预测；搏击效果自然是“根本无招，如何可破”。在可以出现混沌的初始条件上，即使两个双摆的初始条件尽可能相同，如图 3a 所示，运动不到 10 秒钟后，两个摆的运动就会变得截然不同，如图 3b 所示。

a 运动初始时刻 b 运动 9 秒钟时

图 3 双摆运动中的混沌

需要说明的是，混沌不仅在人工搭建的实验装置中出现，也是种广泛存在的自然现象。例如，木星的第 7 个卫星(木卫七)的转动就是混沌的。这主要是因为木卫七形状很特殊，非常不规则，并不像通常星体那样接近椭球体，而像个大土豆。虽然木卫七的轨道运动是周期性的，但木卫七在轨道中时而翻滚时而摆动，自转运动规律无法预测。这种混沌自转与太阳系中的行星和其他卫星的周期性转动都截然不同。

五、 结束语

从前面介绍可知，混沌是种特殊的时间变化模式，具有初值敏感性和非周期性，因而不可长期预测而类似于随机过程。混沌的这些定性的描述都可以相应地引入定量指标进行数值识

别。初始误差的增长导致长期动力学行为的变化，可以用李雅普诺夫指数描述，定量刻画了初值敏感性。耗散系统中，非周期性导致吸引子具有分形结构，可以定义各种分形维数来定量刻画。不确定性的增加导致不可长期预测，可以用动力学熵定量刻画。类似于随机过程就可以用相关函数和功率谱密度等随机分析的工具进行定量刻画。

为了更深入理解确定性系统中出现混沌的哲理，我们用两位大师的阐述结束本文。一位是麦克斯韦 (James Clerk Maxwell, 1831-1879)，他以经典电动力学的创始人和统计物理的奠基人而闻名于世，但同时也是自动控制理论的先驱者之一。他在 1868 年发表的《论调节器》[7]一文中，讨论了蒸汽机自动调速器与钟表擒纵装置的稳定性。麦克斯韦把初值敏感性归结于不稳定性。他在 1873 年的剑桥演讲《物理科学的进步是支持必然性(或决定论)的观点还是支持偶然性和自由意志的观点？》[8]中说：

相同的前因导致相同的后果，这是个哲学法则。没有人否认这一点。但该法则有时候没有多大用处，相同的前因从来不出现，任何事情都不发生第二次。……有条类似的物理学公理，“相似的前因导致相似的后果 。”这里，我们从相同变成相似，从绝对精确变成或多或少粗略的近似。有这样一些现象，其中数据中小的误差导致结果中小的误差。这类情形是稳定的。还有另一类更复杂的现象，其中出现不稳定性；随着变量数目的增加，这类不稳定的情形也增加，而且以极端快速的方式。

另一位大师是混沌理论的开创者庞卡莱。他在《偶然性》[9]一文中写道：

我们觉察不到的极其轻微的原因决定着我们不能不看到的显著结果，于是我们说这个结果是由于偶然性。如果我们可以正确地了解自然定律以及宇宙在初始时刻的状态，那么我们就能够正确地预言这个宇宙在后继时刻的状态。不过，即使自然定律对我们已无秘密可言，我们也只能近似地知道初始状态。如果情况容许我们以同样的近似度预见后继的状态，这就是我们所要求的一切，那我们便说该现象被预言到了，它受规律支配。但是，情况并非总是如此；可以发生这样的情况：初始条件的微小差别在最后的现象中产生了极大的差别；前者的微小误差促成了后者的巨大误差。预言变得不可能了，我们有的是偶然发生的现象。

参考文献

[1] Wiener N. Nonlinear prediction and dynamics. Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 3，Univ. of Calif. Press, 1956：247–252

[2] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences, 1963, 20：130–141.

[3] Lorenz E N. Predictability: Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas? 139th Meeting of American Association for the Advancement of Science (Section on Environmental Sciences New Approaches to Global Weather: the Global Atmospheric Research Program), December 29, 1972

[4] May R M. Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. Science, 1974, 186 (4164)：645–647.

[5] Li T Y, Yorke J A. Period three implies chaos. The American Mathematical Monthly, 1975, 82(10): 985–992.

[6] Feigenbaum M J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. Journal of Statistical Physics, 1978, 19(1)：25–52.

[7] Maxwel J C. On governors. Proceedings of the Royal Society, 1867/1868, 16(100)：270–283.

[8] Campbell and Garnett W. The Life of James Clerk Maxwell, with Selections from his Correspondence and Occasional Writings and a Sketch of His Contributions to Science. London：MacMillan and Co, 1884：362–366.

[9] 彭加勒(李醒民译). 《科学的价值》. 北京：光明日报出版社，1988：387–406.