线性系统控制理论：回顾与感想

程兆林、马树萍
山东大学

迄今为止，线性系统控制理论是控制理论中最为成熟、取得了最为辉煌成果的领域。线性系统理论不但是控制理论的重要基石之一，而且已成为电路与系统、通信以及信号处理等其他信息与系统科学分支的重要理论基础。线性系统的特征是其输入输出关系满足叠加原理。线性系统的控制理论与其他一切技术科学学科一样，是在社会发展需求的推动下，从解决相应时代的重大实际生产和工程问题的需要中产生和发展起来的。一般认为，Nyquist 在 20 世纪 30 年代初对反馈放大器稳定性的研究[1]，是系统控制作为一门学科发展的开端。线性系统控制理论的发展过程经历了“经典线性系统理论”和“现代线性系统理论”两个阶段。

1. 经典线性系统控制理论

1.1 理论形成标志：频率法的建立

线性系统经典理论的形成，以 20 世纪 30 至 40 年代的三项重要成果为标志。

一是 Nyquist 1932 年提出的关于反馈放大器稳定性的结果[1]，这是划时代的贡献。这个结果揭示了反馈系统中产生条件不稳定的原因，给出了以开环频率特性判定闭环稳定性的准则，即 Nyquist 稳定判据。Nyquist 稳定判据的巨大价值在于：它并不要求知道系统微分方程或特征多项式，而只需用实验方法测出系统开环频率特性，据此即可判断闭环的稳定性。并且，这一判据是以充要条件形式给出的，故可直接提示控制工程师通过调整开环增益来改进系统的稳定性，以避免系统的不稳定振荡。

二是 Bode 在 1945 引入的相对于对数频率的对数幅值增益图和相位图[2]，即 Bode 图。Bode 图大大简化了当时已经十分流行的频率响应特性的运算和作图过程，使基于频率响应的反馈控制系统的分析与综合设计更趋实用。

Bode 的其他重要贡献是，1）针对参数摄动对于单输入单输出反馈控制系统的影响，提出了幅值裕量和相位裕量的概念，以此来衡量系统所能容忍的不确定性的范围，并引入灵敏度函数来衡量参数摄动下的系统性能。2）就零、极点均在左半平面的单输入单输出系统，提出了著名的 Bode 增益-相角关系，即系统的相角可表示为系统的对数幅频特性的一个积分。这一关系之所以重要，是因为它可以指导人们在采用反馈获得增益与为此而不得不在增益带宽方面付出代价，

两者之间作出适当的权衡[3]。

三是Evans于1948年提出的根轨迹法[1]。这一方法本质上是一种图解法，能简单有效地由系统参数及开环零、极点近似地描绘闭环根轨迹，以求取闭环极点分布，因而能对如何改变开环增益以使闭环满足系统动态及稳态性能要求给出指导。

与此同时，关于闭环稳定性的逆Nyquist判据亦在1947年被James等人首次讨论[1]。

Nyquist-Bode-Evans 方法的建立与发展是复变量理论在系统控制领域的巨大成功，在随后的多变量系统控制理论的发展中，我们会更深刻地感受到它的魅力。

1.2 频率方法在线性离散系统中的推广

频率方法在以线性差分方程描述的采样-数据系统，即线性离散系统中的推广，当首推20世纪50年代初期Tsypkin、Ragazzini和Zadeh，以及Jury等人的工作[3]。在该领域，Z-变换和脉冲传递函数的作用相当于Laplace 变换和传递函数在线性连续系统的作用，而对于系统的反馈设计与综合，除了注意闭环零、极点的配置对于系统动态及稳态性能的影响外，还应注意采样周期的选择。

1.3 频率方法对其他控制领域的影响

线性系统的频率方法对于线性随机系统及非线性系统的影响同样是不可低估的。

对于输入为平稳随机过程的线性随机系统，随着输入及输出谱密度、交叉谱密度，以及传递函数概念的引进，频率方法被迅速推广。这一过程中，Wiener的谱分解定理的建立，以及Wiener和Kolmogorov彼此独立完成的关于平稳随机信号的滤波和预报理论的开创性研究（Wiener 于 1942 年，关于线性连续随机系统；Kolmogorov 于 1941 年，关于线性离散随机系统）做出了重要贡献。然而，在随后的发展中，Wiener -Kolmogorov理论在实践中却并没有得到广泛的应用。其中重要的一个原因即是，这一理论要求对被称为 Wiener-Hopf 方程的积分方程求解，而在许多实际问题中，该方程很少有解析解，并且也很难得到数值解。这一困境在一定程度上催生了 1960-1961 年间借助于数字计算机、使用递推迭代方法的Kalman-Bucy 滤波理论的诞生。

频率方法在非线性控制系统领域的推广则是借助于描述函数方法进行的。该方法产生于20世纪40年代后期至50年代初期，是一种基于系统非线性特性谐波线性化的图解分析方法。尽管这一方法仅是一种近似方法，使用中有一定限制，但对于非线性系统的反馈及消除自激震荡起着重要作用，与之相适应，建立在严格数学基础上的描述函数理论亦由于应用的需要而得到长足进展[1]。

20世纪60年代初期，Popov关于单输入单输出线性时不变系统在满足扇形条件的非线性反馈作用下闭环绝对稳定性的研究，以及他于 1961 年建立的频域判据则极大地沟通了频率方法与时域的 Lyapunov 方法的联系，1964 年发表的 Sandberg 圆判据更是Nyquist判据在这一问题上的直接推广[1]。对于多输入多输出系统，Popov 频率判据在该领域的推广，当首推 1967-1968 年间 Moore和Anderson发表于 Int. J. Control 及 J. Frankling Inst.的工作。

1.4 研究对象和方法

经典线性系统理论的主要研究对象是单输入单输出线性时不变系统。所用的主要数学工具是复变量理论、Laplace 变换及Fourier 变换。分析和综合控制系统的主要

方法是频率响应法和根轨迹法(Nyquist-Bode-Evans方法)。系统分析设计中采用的主要手段是作图、工程近似与控制工程师的经验三者的结合。贯穿于设计始终的是，基于实验基础的、以信号传输观点来研究系统动态与稳态性能的思想，并且基于应用观点，考虑到了不确定性对于系统性能的影响。基于此，经典线性系统理论以其物理概念清晰、研究思路直观、方法简便实用，受到控制工程师及相关技术人员的欢迎。

经典线性系统理论从概念和方法上为线性系统的控制奠定了基础，为现代数字计算机尚未产生和发展的那个时代提供了非常实用、有效的自动控制设计手段。甚至在今天，对于单输入单输出线性时不变系统的分析与综合，这一理论仍有其持久的价值和魅力。

1.5 局限性

经典线性系统控制理论的局限性表现在，一般难于有效地处理多输入多输出线性系统的分析与综合，以及难以揭示和系统内部结构有关的、更为深刻的系统特性。

1.6 重要专著

在众多经典线性系统理论专著中，兼有学术与实践意义，在国际上具有重要影响的专著，据作者所知，当推Bode[2]，钱学森(Tsien)[4]，Horowitz[3]等的著作。

2. 现代线性系统控制理论

2.1 理论形成标志：状态空间法的建立

在第二次世界大战结束后的20世纪50年代，由于蓬勃发展的航空、航天技术的推动，以及计算机技术的快速发展，不同种类的控制器设计要求、相关变量的联合控制均提上日程，而这些恰是经典线性控制理论所不能适应的。在此背景下，线性控制理论开始了从经典理论到现代理论的过渡，反映这一过渡的重要标志性成果即是Kalman于1960年创立的状态空间方法[5]。在他的框架下，形如 $\dot{x}=Ax+Bu,\ y=Cx+Du$ 的状态方程与输出方程被用来描述线性动态系统，这里 $x\in R^n$ 称为状态变量， $u\in R^r$ 及 $y\in R^m$ 分别为输入、输出变量， A,B,C,D 为适当维数的矩阵。这一结构给出了输入输出关系的一个内部描述，它不仅能提供实际要处理的有关输入、输出的外部信息，并且能够提供有关系统内部结构特性的全部信息，而这恰是经典线性控制理论所不具备的，这是一个全新的框架。

2.2 20世纪60年代状态空间法的主要成果

在状态空间框架下，关于系统状态能控性及能观性的概念，以及两者的对偶关系被Kalman首次给出[5]。这些概念与控制系统的内部结构特性密切相关，对系统控制具有基本的意义。一经提出，即被众多控制论学者相继研究，并被迅速移植于多类控制系统，例如非线性系统、随机系统、分布参数系统、时滞系统、奇异系统、离散事件系统，以及多维动态网络。此外，关于控制受限系统能控性、正控制系统能控性，以及参数不确定系统的结构能控性等概念亦被相继提出和讨论。

状态空间方法在20世纪60年代得到快速发展。能控子空间被引入，基于状态空间正交分解的Kalman规范分解定理被建立；能控系统的各类标准形相继被给出，对偶地，能观系统亦然。与系统结构相关的能控性、能观性判据亦被Gilbert，Popov，Hautus，Belevitch等人相继给出。基于输入输出数据的状态空间实现理论则首先被Kalman，Gilbert，随后被Ho， Youla， Silverman， Tether 等人相继讨论。保持系统能控、能观性的前提下，由线性变换对其输入、输出维数的极小化，亦于 1970 年被 Heymann 深入讨论（参见[5]第 2，5-7 章及所引文献）。

作为系统综合的根本问题之一，能控性与经状态反馈实现闭环极点任意配置的关系受到众多学者的关注。20 世纪 60 年代初期，Rissanen，黄琳等人就单输入情形彼此独立地给出了一个完全的陈述与证明[5-6]，而多输入情形则由 Wonham 于 1967 年彻底解决[5]（其证明于 1968 年被 Heymann 简化）。能观性与状态重构问题的讨论则可溯源于 1960 年 Kalman 滤波器的提出，事实上，Kalman 滤波器即是线性随机系统状态的一个递推线性无偏最小方差估计器。关于确定性线性系统的能观性与状态重构的关系、全阶观测器与降阶观测器设计、输出动态反馈，以及输出动态反馈构成的闭环的极点分离特性，输出动态反馈构成的闭环与直接状态反馈构成的闭环的传递函数矩阵的同一性问题等，于 20 世纪 60 年代中后期相继由 Luenberger 等人讨论，并获得完全解决[5]。观测器及输出动态反馈的一个几何解释则由 Wonham 给出[7]。

基于状态空间法的线性二次指标最优控制问题（LQ 问题）的研究，当首推 Kalman 的工作，他于 1960 年首次把这一问题的求解归结为求解一个矩阵 Riccati 方程[8]。关于我国学者的相关工作，这里应特别提及的是黄琳等人的工作[6]。在当时我国相对封闭的学术环境下，他们与 Kalman 彼此独立地研究了 LQ 问题，获得了 LQ 问题解的存在唯一性、线性最优控制律，以及求解 Riccati 方程的序列逼近法。整个 20 世纪 60 年代，无论是确定性控制系统领域，还是随机控制系统领域，LQ(LQG)问题的研究都得到长足的进展[8-9]。在随机控制领域，关于滤波与控制的分立定理亦由 Potter， Striebel， Wonham 等人相继建立[9]。

此外，便于工程应用的状态反馈镇定或输出动态反馈镇定的计算机辅助设计已经开展；闭环系统的灵敏度分析，反馈设计性能极限的研究亦已受到关注[10，3]。

2.3 20 世纪 60 至 70 年代形成的新的研究体系与进展

20 世纪 70 年代，线性系统理论在状态空间法的基础上出现了着重从几何方法角度研究系统结构特性和反馈设计的线性系统几何理论，出现了作为经典频率方法的推广和深化的多变量频域理论，出现了以算子环上模代数结构为主要研究工具的线性系统代数理论。与此同时，随着计算机软件与硬件技术的发展和普及，线性系统分析和综合中的计算问题，包括数值稳定性问题，得到广泛研究。应用于工程实际，面向人机交互的控制系统的计算机辅助设计技术也得到长足进步。

以下对线性系统的几何理论、多变量频域方法及代数方法作一简要叙述。

(1) 几何理论

几何理论的特点是，把线性系统的研究转化为状态空间中的相应几何问题，采用几何的语言来对系统进行描述、分析和综合。它的主要数学工具是线性代数的几何理论，基本思想是把与系统能控性、能观性有关的各种系统结构特性表述为不同类的子空间族的几何属性。在几何理论中，具有关键意义的两个概念是 (A,B)-不变子空间族和 (A,B)-能控子空间族的概念，这里 A，B 分别是系统矩阵和控制矩阵。这两个概念在用几何方法解决诸如干扰解耦和跟踪、输入输出解耦等系统综合问题时起着基本的作用。

几何方法的特点是：描述简洁，推断明晰、严谨，避免了状态空间法中大量的矩阵计算，而在一旦需要计算时，几何方法的结果又能比较容易地转化为矩阵计算。

线性系统的几何理论由 Wonham 及其同事们于 20 世纪 70 年代初期开创和发展。(A,B)-不变子空间族理论即是由 Wonham 和 Morse 以及 Basile 和 Marro 在研究干扰解耦和输入输出解耦等问题时各自独立建立的[7]。Wonham 的专著“Linear Multivarible Control: A Geometric Approach”[7]于 1974 年问世，标志着线性系统几何理论的理论体系已经建立。此后 (A,B)-不变子空间理论被诸多学者以不同方式推广，例如，1980-1982 年间 Willems 建立的，适用于几乎干扰解耦和鲁棒输出调节的几乎 (A,B)-不变子空间理论；1984-1985 年间郑毓蕃、韩正之建立的，适用于闭环特征配置的 (A,B)-特征子空间理论。

20 世纪 70 年代至 80 年代初期，几何理论在线性控制的诸多领域，包括输入输出解耦、闭环特征配置、模型匹配、系统无穷零、极点结构、输出调节与鲁棒输出调节、反馈不变量理论，以及大尺度线性系统的分散控制领域均取得令人瞩目的成功[7, 11]。

线性系统几何理论对于非线性系统几何理论的发展起着重要的借鉴作用。非线性系统几何理论中起着关键作用的 (f,g)-不变分布即是线性系统几何理论中的 (A,B)-不变子空间概念的推广。

1980 年，Emre 和 Hautus 给出了 (A,B)-不变子空间的一个频域特征描述[12]，这充分说明了几何理论与下面将要讨论的多变量频域方法存在着自然的联系。其实，这并不奇怪，因为两者所讨论的是同一类动态系统，即线性系统的结构特性及反馈设计，所不同的只是考察问题的着眼点，以及所用的工具。

(2) 多变量频域方法

20 世纪 60 年代，线性系统的状态空间方法，特别是二次性能指标下的最优状态反馈及最优滤波理论在航天事业的应用中取得了巨大的成功。这自然引发了尝试将这一理论应用到范围更为宽广的工矿企业过程控制中的企图，但许多实例显示，它并不能直接应用。这主要是因为所建立的模型不能充分精确，同时，动态与静态性能指标中的各个参数也难于在控制器设计中得到规定，而这在航天背景下是并不明显的。此外，借助于观测器或 Kalman 滤波器的反馈控制器的结构过于复杂，不适于过程控制应用。这促使人们重新注意经典频域方法，并尝试将其发展为适合多输入多输出情形。这一过程中的代表人物是 Rosenbrock 和 MacFarlane。

20 世纪 60 年代中期，Rosenbrock 在 Nyquist 周线上讨论多输入多输出闭环的回比矩阵，他应用矩阵对角占优技术，通过设置前置补偿器来削弱输入的交互影响，巧妙地将多输入多输出反馈系统稳定性的判定转化为对于一组单输入单输出反馈系统稳定性的判定，这使得经典 Nyquist 方法得以应用。特别是他提出的逆 Nyquist 阵列法适于人机交互的计算机辅助设计，因而工业应用也随之获得推动[10]。

20 世纪 60 年代至 70 年代中期，多变量频率法领域的重要成果[1, 5, 10, 13]还有：

• 藉助于有理分式矩阵的互质分解和 Smith-McMillane 标准形，传递函数矩阵的结构性质被阐明，传递函数矩阵的有限零、极点及无限零、极点被定义，其物理属性被

阐明。

•传递函数矩阵的能控性实现、能观性实现，以及最小实现被用频域方法计算，逆系统的概念被提出，并被应用于系统分析和设计。

•传递函数矩阵的正实性及严格正实性被讨论，相应的正实引理及谱分解定理被证明。这些结果沟通了频域方法与状态空间方法的联系，在系统稳定性、绝对稳定性，以及鲁棒稳定性研究中起着重要作用。

•状态反馈对于闭环输入输出性能的影响被用频域方法阐明，与此相关的 Rosenbrock 控制结构定理被证明。

•镇定控制器设计的参数化技术被 Youla 等人于 1976 年首次引入。

•多变量系统的输入输出解耦、模型匹配、极点配置与特征矢量配置、输出调节，以及动态补偿器设计的频域方法被阐明，并被用于计算机辅助设计。

•Rosenbrock 的对角占优技术从多个角度被改进，尤其是 1973 年 Mayne 提出的序列返回差方法，该方法简化了 Rosenbrock 的设计，并保证闭环有更好的鲁棒性。

•Rosenbrock 的线性动态系统的微分算子描述，亦即多项式矩阵描述被提出。尽管这是一时域描述，但它与系统的矩阵分式描述有着天然的联系，在研究方法上可以相互借鉴。特别是 Rosenbrock 的“系统矩阵”及系统等价概念的提出，它起着沟通时域研究方法与频域研究方法桥梁的作用。

20 世纪 70 年代，MacFarlane 和他的同事们，包括 Postlethwaite 等人，则从另一途径去处理多输入多输出反馈系统的稳定性分析[1, 14]。他们从复变函数论和代数函数论出发，把回比矩阵的特征值函数(他们称之为开环特征增益函数)作为定义在其 Riemann 面上的代数函数，在该 Riemann 面上建立广义幅角原理，并在该 Riemann 面的 Nyquist 周线上讨论开环特征增益轨迹，建立了适合多变量反馈系统的广义 Nyquist 稳定判据和广义逆 Nyquist 稳定判据。与此同时，广义根轨迹理论亦被发现。如此，适合单输入单输出线性时不变系统的经典 Nyquist-Bode-Evans 法被拓广为适合多输入多输出线性时不变系统的广义 Nyquist-Bode-Evans 法，这是经典频域法的重大发展。

在此框架下，多变量系统反馈综合的频域设计方法得到重要发展，例如基于回比矩阵特征矢量的并矢展开技术、对准技术，以及可交换补偿器设计；基于回比矩阵奇异值的准 Nyquist 轨迹设计，以及由此形成的借助于计算机的“准传统设计”技术均得到发展[11, 14-15]。

20 世纪 80 年代初期，随着鲁棒控制的发展，多变量频域方法的研究趋向于系统的鲁棒稳定性分析和鲁棒镇定，对于鲁棒稳定性分析有着重要作用的矩阵奇异值分析被引入以代替特征值分析。这里，Doyle 和 Stein[11]、Postlethwaite，Edmunds 和 MacFarlane[11]的工作是值得指出的，前者以矩阵奇异值为工具平行推广了单输入单输出反馈系统的 Bode 设计方法(回路成形法)，指出了影响多变量反馈系统鲁棒稳定性的关键因素是系统回差矩阵的奇异值；后者利用主增益(奇异值)和主相位的概念研究了多变量反馈系统的稳定裕量。

在此期间，反馈系统的灵敏度分析，以及开环系统右半平面的零、极点对于反馈设计性能极限的影响已有深入研究，例如 Cruz， Freudenberg， Looze 等人的工作[11，16]。

(3) 代数方法

20 世纪 60 年代中期，Kalman 基于对线性时不变系统代数结构的理解，以及当时对于线性时滞系统、线性有限自动机理论研究的需要，提出用模论方法来研究一般线性系统，并在实现理论方面取得突破[17]。随后十余年内，经 Fuhrmann， Rouchaleau，Kamen，Sontag，Emre，Khargonekar，Desoer，Saeks 等人的发展而趋成熟，获得了诸如能控性、能观性、实现理论、观测器理论、闭环极点配置理论、传递函数矩阵互质分解、模型匹配、输出调节，以及动态补偿器设计等丰富成果[11，18-19]。此外，Emre 还将 Wonham 的 (A,B)-不变子空间理论发展为 (F,G)-不变子模理论[18]，从而沟通了模论方法与几何控制理论的联系。

20 世纪 70 年代中期，模论方法由研究线性时不变系统的交换环上模论方法发展为研究线性时变系统的非交换环上模论方法。这是一个重大飞跃，其研究中所遇到的困难与交换环上情形有本质不同，例如对于非交换环上矩阵而言，就没有熟知的 Cayley-Hamilton 定理。因篇幅所限，本文不讨论时变情形。

20 世纪 60 年代中期，Rosenbrock 对于线性动态系统引入的微分算子描述（多项式矩阵描述（PMD））也是一种代数方法[5]。他用一个多项式矩阵四元组 $\big(P(s),Q(s),R(s),W(s)\big)$ 表示线性动态系统：

$$P(D)z(t)=Q(D)u(t),\quad y(t)=R(D)z(t)+W(D)u(t),$$

式中 $P(\cdot),Q(\cdot),R(\cdot),W(\cdot)$ 为多项式矩阵，D 为微分算子。在他的框架下，四元组 $\big(sI-A,B,C,J(s)\big)$ 即表示状态空间描述：$\dot{x}=Ax+Bu, y=Cx+J(D)u$，四元组 $\big(D_L(s),N_L(s),I,0\big)$ 则表示传递函数矩阵描述：$G(s)=D_L^{-1}(s)N_L(s)$。这样，线性动态系统的状态空间描述及频域描述均纳入他的统一框架。无疑，这一框架可以成为沟通状态空间方法与频域方法的桥梁。此外，他引入的系统矩阵

$$\begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{bmatrix}$$

简洁、自然，便于进行多项式矩阵运算，对他的理论体系的建立起了重要作用。

20 世纪 60 年代中期至 70 年代，经 Rosenbrock， Wolovich， Fuhrmann， 以及 Pernebo 等人的工作，线性动态系统的多项式矩阵描述在系统等价，系统零、极点及其对系统动态特性的影响，实现理论，以及逆系统理论领域取得重大突破；PMD 的不可简约性与其状态空间实现 $\big(A,B,C,J(D)\big)$ 的能控能观性之间的关系被阐明；PMD 的反馈设计，包括状态反馈和动态补偿器设计，在实现闭环极点任意配置、输入输出解耦、输出调节，以及实现输入输出模型的精确匹配等方面均取得重要进展。其间，Rosenbrock 关于系统解耦零点的概念及其物理属性的叙述，更是丰富了人们对于状态空间系统的认识（参见[10-11，13]，以及[5]第 8 章）。

20 世纪 80 年代初期，我国学者王朝珠、王恩平等人在 PMD 的鲁棒输出调节领域亦有很好的工作，特别是他们对多变量线性反馈系统的非退化条件及物理可实现性进行了透彻的讨论。

几何方法、频域方法及代数方法从不同方面抓住了线性系统的结构特征和物理属

性，对线性系统理论的发展起着不可或缺的重要作用。这三种方法又和状态空间方法紧密相连，它们之间的借鉴与融合推动着线性系统理论更为深入的发展。

2.4 线性系统控制理论的几个主要课题的研究进展

(1) 输入输出解耦

通过状态反馈以及对输入变量的线性组合来实现输入输出解耦的目的即是，抵消系统输入输出之间原有的交叉耦合，并同时达到满意的动态响应。解耦问题是控制理论中很早即引起人们注意的、有持久魅力和很大应用价值的重要课题，用传递函数矩阵做的早期工作可见钱学森的专著[4]。求解解耦问题的状态空间方法是 Morgan 和 Rekasius 各自独立开创的(前者于 1964 年，后者于 1965 年)，随后 Falb 和 Wolovich， Gilbert 等人作了进一步的发展，给出了问题可解的充要条件，但并未涉及闭环的稳定性，并且，研究工作局限于输入输出变量个数相同的情形（参见[7]第 9.10 节）。1970 年 Wonham 和 Morse 用几何方法，特别是应用(A,B)-不变子空间及子空间族的根的概念，在一般情形下用状态反馈并附加一个动态补偿器的方法研究了块解耦问题，获得了兼顾解耦和闭环稳定性的很好结果(参见[7]第 9-10 章)；1971 年 Silverman 和 Payne 则从系统输入输出结构着手研究块解耦及其算法，他们的方法不同于 Wonham 和 Morse 的几何方法,并且，结果有所改进[7]。其时，解耦问题讨论之热烈，由此可见一斑。20 世纪 80 年代，所谓多目标输入输出解耦问题，亦即同时实现输入输出解耦及输出调节的问题受到越来越广泛的关注。1981 年 Wolovich 对于非最小相位系统，用 PMD 讨论了同时实现输入输出解耦、闭环极点任意配置，以及鲁棒输出调节的问题，给出了设计算法[11]。1986 年 Desoer 和 Gündes 从交换环的代数理论出发，利用传递函数矩阵的互质分解及 Youla 的控制器参数化技术讨论了输入输出解耦问题的动态补偿器设计，获得了同时实现输入输出解耦、镇定及干扰抑制的充要条件[19]。

解耦问题的另一重要进展是，1982 年 Descusse 和 Dion 发现系统无限零点的阶数与解耦问题的可解性有着本质的联系。进一步的研究以及关于系统基本阶概念的引进导致 1988 年 Descusse，Lafay 和 Malabre 给出对角解耦问题的一个完全解，这里，状态反馈律中的输入变换矩阵被允许为奇异的。1990-1991 年间 Descusse 进一步研究了块解耦问题，获得了很好的结果，其所用方法的关键点是块基本阶概念的引入，以及一个适宜的输出变换的实施（参见[20]及所引文献）。

我国学者许可康、陈树中等人在输入输出解耦领域亦有很好工作。1993-1996 年间他们对于一类输入、输出变量个数不等的对角解耦问题进行了深入的讨论，不仅给出了问题可解的充要条件，并且给出了判断充要条件是否成立的简明算法。

对于工程应用而言，解耦设计要解决的一个重要问题即是闭环的稳定性及动态品质，由此发生的带极点配置的三角解耦及块解耦、近似解耦、自适应解耦及鲁棒解耦自 20 世纪 70 年代以来均得到快速发展。

(2) 输出调节

输出调节的主要内容是设计动态补偿器实现闭环对于参考输入的无静差跟踪及干扰解耦，并保证闭环内稳定。这里，参考输入

与干扰信号的动力学结构被认为是已知的。20 世纪 70 年代中期，输出调节问题的重大进展是内模原理的引进。所谓内模原理是指，作为输出调节问题解的动态补偿器，其伺服部分必须含有反映外部环境，即参考输入及干扰的动力学结构的一个动态模型。内模原理可直接溯源于经典控制论中为了跟踪阶跃(斜坡)参考输入或为了抑制阶跃(斜坡)干扰，而在控制器设计中引入积分装置，以使得闭环传递函数零点与外部信号极点实现零极对消的思想[3]。

20 世纪 50 至 60 年代，“内模”作为一种设计观点在非线性预测控制中被提及（参见[7]第 8.10 节）。

20 世纪 70 年代中期，对于多变量系统输出调节问题，将内模原理作为动态补偿器设计指导思想引入，并详加论述与研究的，当推 Francis 和 Wonham， Davison 和 Goldenberg 以及 Bengtsson 等人的工作[7, 21, 1]。这里，Francis 和 Wonham 用的是几何方法；Davison 和 Goldenberg 用的是状态空间方法；Bengtsson 用的是频域方法，并且 Francis 和 Wonham，Davison 和 Goldenberg 均考虑了鲁棒输出调节问题。

20 世纪 80 年代初期，Saeks 和 Murray 在环上讨论了一般线性系统的输出调节问题，得到了问题的一个完全解[11]，其所用方法的核心是，传递函数矩阵的互质分解及 Youla 的控制器参数化技术。同期，韩京清、许可康用他们建立的极大绝对能观子系统理论讨论了用状态反馈实现干扰解耦问题，获得了充要条件，并给出了求取状态反馈阵的一个构造性算法。

目前存在于输出调节设计中的一个重要问题是，所获得的动态补偿器的阶数过高。例如，对于一个具有两个输入、两个输出的 5 阶系统，需要设计一个动态补偿器，使得闭环系统能够跟踪一个具有固定频率的正弦信号，并抑制一个斜坡干扰，按 Wonham 的计算，这需要一个 15 阶的动态补偿器[7]。这样高的阶数对工程应用显然是不利的，降低控制器的阶数是必须要考虑的一个理论和实践问题，这一研究已逐步展开[22]。

(3) 线性二次最优调节器（LQ）问题

LQ 问题的解，最初由 Kalman 于 1960 年发表的开创性论文给出。他用自己建立的能控性、能观性概念，结合变分计算，将问题的求解归结为解一个 Riccati 方程，并获得了最优状态反馈综合。更为难能可贵的是，在他于 1964 年发表的关于 LQ 问题的逆问题的论文中，对于单输入系统给出了最优状态反馈闭环的回差函数所必然满足的一个频域条件，即著名的 Kalman 不等式：$\left|1+K(j\omega I-A)^{-1}b\right|\geq 1$，式中 K 为反馈增益，A,b 分别为开环系统的系统矩阵与控制矩阵，ω 为频率。Kalman 同时指出，这一条件还是充分的，即在 $[A,b]$ 能控，具反馈增益 K 的状态反馈闭环渐近稳定条件下，若该闭环满足 Kalman 不等式，则它必为某一 LQ 问题的最优状态反馈闭环[8]。这样，最优状态反馈闭环的频域性质即以充要条件方式被 Kalman 不等式所揭示，这建立了时域方法与频域方法的内在联系，是 LQ 问题研究领域划时代的贡献。

从 Kalman 不等式容易推出，对于单输入系统线性二次最优状态反馈设计，其闭环具有无穷增益裕量及 $\pm 60^\circ$ 相位裕量。此外，对于从反馈通道引入的非线性特性，最优状态反馈闭环还具有扇形区斜率不低于 1/2 的非线性容限。以上这些均说明单输入线性二次

最优状态反馈闭环具有很好的鲁棒性。

Kalman 不等式及其关于 LQ 逆问题的相关结论，在 1966 年被 Anderson 推广到多输入线性系统。对于多输入线性二次最优状态反馈闭环在通道任一环节引入非线性特性的情形，其非线性容限的扇形区边界的计算，则由 Moore 和 Anderson 于 1967 年用圆判据给出[8]。

整个 20 世纪 60 年代以至 70 年代中期，随着航空、航天应用的发展，LQ 问题的研究得到蓬勃发展。这主要表现在[1，5-9，16，23]：

- 最优状态反馈闭环的灵敏度与鲁棒性能分析、主导极点配置及加权阵选择的研究得到深化。
- 二次性能指标最优下的干扰解耦与跟踪由引入动态补偿器及增广系统获得解决。
- 最优静态输出反馈，以及基于观测器的最优动态输出反馈被深入研究。
- 基于 Kalman 滤波器的 LQG 问题被广泛讨论。
- 性能指标中与控制有关的权矩阵 R 趋于零时，最优闭环根轨迹的渐近行为，以及奇异最优控制问题被深入研究。
- 与 LQ 问题有关的代数 Riccati 方程被深入研究，求解 LQ 问题的计算技术，尤其是代数 Riccati 方程的数值求解获得重大进展。

20 世纪 70 年代中期以来，随着 1978 年 Doyle 的工作的发表[24]，观测器或者 Kalman 滤波器的引入对于 LQ（LQG）问题解的鲁棒性能的破坏受到越来越多的关注。与之相关的讨论使人们认识到，与直接状态反馈情形不同，LQG 问题的解不能提供与具体系统无关的稳定裕度。这使得 LQG 控制器的设计者不得不对其每项设计去分别验证相应闭环的稳定裕度。

面对以上情况，1981 年 Doyle 和 Stein[11]，Safonor，Laub 和 Hartmann[11]分别建议用削弱 Kalman 滤波器对于误差性能的最优性的方法来换取 LQG 问题解的鲁棒性的改善，即在最优性与鲁棒性之间取得一个折衷。这是一个很好的想法。

Doyle 和 Stein[11]的具体做法是，他们首次提出了一个称之为 LQG 回路传递恢复（LQG/LTR）的方法，其特点是引入一个虚拟噪声方差以改变滤波器增益，使得在中频段能对因滤波器引入而变坏的回差矩阵特性给予有效补偿。Safonov，Laub 和 Hartmann[11]的做法是，在二次型指标中引入对于回差矩阵和逆回差矩阵的惩罚项，以改善闭环的鲁棒性能。以上两种方法均属多变量回路成形设计范畴[16]，其总的设计思想是设计一个滤波器增益，使得 LQG 控制的回路特性能逼近直接状态反馈情形下 LQ 控制的回路特性。

整个 20 世纪 80 年代，随着多变量系统鲁棒控制研究的深入，LQ(LQG)问题的研究无论在深度和广度上都有长足进步[11，16]。其时，在最优静态输出反馈领域，我国学者黄琳和李中有很好的工作，他们首次给出了问题有解的充要条件。

20 世纪 90 年代以来，LQ(LQG)问题已扩展为 H_2 控制问题。自 1989 年 Doyle，Glover，Khargonekar，Francis 的著名论文将 H_∞ 控制问题的求解归结为解两个代数 Riccati 方程，从而从本质上沟通了 LQ 问题与 H_∞ 控制问题的联系以来，LQ 问题与 H_∞ 控制问题的关系已被阐明，与干扰抑制相关的极大极小 LQ(LQG)设计亦有很大发展[16]。

(4)控制器降阶

前面已经提及，在进行控制系统设计时往往会得到高维的控制器，而这常会导致计算量大、工程实现困难，所以在保证系统性能损失在可容许范围内的前提下，设计低维度的控制器是工程实践需要，也是重要的理论课题。

基于降阶模型去设计一个降阶控制器，已有不少作者讨论，例如：20 世纪 80 年代至90年代初期，由Moore引入，并由Pernebo，Silverman，Enns，Glover 等人发展的平衡模型降阶法；由 Desai 和 Pal 引入，并由 Green，Wang，Safonov 等人发展的平衡随机截断法；由 Admjan，Aror 和 Krein 引入，并由 Kung，Lin，Glover，Limebeer，Lathan，Anderson，Zhou 等人发展的 Hankel 范数逼近法（参见[16]第 7-8 章）。这些方法的本质是，要求一个按高阶开环的低阶近似模型所设计的控制器去有效控制该高阶开环。这无疑会导致近似规则过于粗糙，以致于闭环性能指标的损失过大。基于此，Anderson 在 1992 年 IEEE CDC 的大会报告：“控制器设计：从理论到实践”[22]中提出：先对高维模型设计一个高维控制器，然后再对所设计的控制器进行降阶，很可能是一个有效的方法。可以看出，Anderson 的建议较之于先前的基于降阶模型的方法更顾及到闭环性能的保障。目前，这方面已有一些结果，例如：Liu，Anderson，Ly 等人的加权和不加权互质因式分解控制器降阶法；Goddard 和 Glover 的 H_∞ 加性降阶和互质因式分解法（参见[16]第 19 章）。然而，问题尚未完全解决，例如多性能指标的控制器降阶问题等。这里，关键是在控制器降阶、系统鲁棒镇定、系统灵敏度、系统各类性能指标之间取得一合理折衷。

(5)反馈能力极限

关于线性系统（乃至非线性系统）控制理论的研究，有必要提及一类基本的，但却不易回答的问题——反馈控制是否有某些带根本性的局限？通俗来讲就是问，通过反馈“什么能够做到?”，“什么不能做到？”。通常人们往往只关注上述问题的前者，而后者则从根本上反映了受控对象特征参量对反馈能力的约束。

针对上述反馈能力局限问题，不少学者从不同角度进行了深入探讨。事实上，这方面的工作可一直追溯到 Bode 的经典工作[2]，他关于系统灵敏度的一个重要结论指出，对于相对阶超过 1 的单输入单输出线性开环稳定系统，其单位反馈系统的灵敏度函数的幅值取对数后关于频率的积分必然为 0。这一结果意味着，如果想减少一个频段上的敏感性，必然要以牺牲其它频段上的敏感性为代价，亦即产生所谓“水床效应”。这一概念对 H_2和 H_∞设计有着带根本性的指导意义。20 世纪 60 年代初期，Horowitz 基于对单输入单输出线性系统反馈设计的深入研究，对 Bode 的结果给出了进一步的论述[3]。20 世纪 80 年代中期，Freudenberg 和 Looze 对更为一般的单输入单输出线性系统（如开环不稳定系统、非最小相位系统）进行了分析，集 Bode 与 Horowitz 之大成，全面、完整地阐述了单输入单输出线性系统反馈设计的局限性[16, 25]。20 世纪 90 年代中期，陈杰将上述研究拓展到了多变量线性系统，其结果指出，对于多变量反馈系统而言，Bode 积分不但受

到开环不稳定极点和非最小相位零点位置的约束，并且还与这些零、极点的方向有关，而这些方向则是由被控对象的结构决定的（参见[16]第6章及[25]第4章）。这反映出，在反馈能力极限的研究中多输入多输出系统远比单输入单输出系统复杂，研究多变量系统具有更大的难度，更能揭示问题的本质。

同期，Åström 亦指出了控制系统反馈设计的某些带根本性的局限[25]。

在反馈能力极限研究领域，一批华人学者的工作是出色的。除了上面提及的陈杰的工作外，这里还应提及 1993 年丘立等人关于非最小相位系统输出调节性能极限的研究；2003 年苏为洲等人关于谐波信号跟踪性能极限的研究，陈杰等人关于控制能量受限系统输出调节性能极限的研究，以及 2008 年陈杰等人关于采样-数据控制系统最优跟踪性能极限的研究。这些工作从多个角度全面、深刻地揭示了线性系统线性反馈设计的局限性，以及导致这类局限的原因，对于推动这一领域的深入研究有重要意义（参见[26]及所引文献）。

不仅控制系统中存在着反馈设计的局限性问题，滤波问题中也同样存在着滤波器设计的局限性问题。关于这方面的相关工作可参见[25]及所引文献。

上面提到的研究主要是利用系统传递函数以及灵敏度函数、补灵敏度函数等工具来进行的，主要适用于线性系统和线性反馈律，不是针对所有可能的反馈律的集合，因而也不可能彻底回答反馈对付不确定性能力极限的问题。与上述研究框架不同，20 世纪 90 年代中后期，我国学者郭雷针对非线性系统自适应控制全局稳定设计理论主要适用于连续时间系统，而一般不适用于离散时间系统的困境，开创性地提出了针对离散时间非线性不确定性控制系统，研究反馈机制对付不确定性能力极限的问题。这是一个在更为广阔的背景下提出的新的研究方向，这里，所讨论的反馈机制包括所有可能的（非线性和时变）因果映射，系统不确定性的定量度量被创造性地建议为用广义 Lipschitz 范数来度量，而研究目的则是定量理解反馈机制究竟能对付多大的结构不确定性。在这一领域，经过十余年的努力，郭雷和他的学生谢亮亮、张艳霞、马宏宾等人取得了一系列创新性成果[27]。特别是一类被称为“不可能性定理”的发现，这类定理以充要条件或充分条件方式给出系统不确定性界，指出若不确定性超过这个界，则任何反馈设计均不能用来全局镇定这一类不确定性系统。郭雷在 2002 年国际数学家大会上的大会报告系统而深入地总结了这方面的工作，并提出了一些前瞻性的公开问题[27]。

研究反馈所能达到的能力极限是一个非常深刻而基本的课题，目前这一课题还存在着很多没有解决，或难以解决的问题，值得为此付出长期、艰苦的努力。

3. 感想

线性系统控制理论，就其作为控制系统的基础理论而言，理论上已经成熟。回顾它发展、壮大的历史，以下几点很可能是值得强调的。

•视系统为信号传输网络的观点。在这个观点下，识别输入输出特性，并设法予以改善，将始终是控制理论研究的一个首要任务。事实上这就是系统识别和控制器设计的任务。

•反馈对于改善输入输出特性起着本质的作用。反馈可以改善系统结构，从而改善输入输出特性。然而，反馈并不是万能的，研究反馈能做到什么，不能做到什么，是一个十分深入而有意义的课题。

•系统的内稳定性和鲁棒性（亦即系统对于外部环境的变化，以及内部结构参数的改变所应具有的容忍性）始终是衡量系统优劣的一个首要标准。

•为保证信号有效传输，干扰或噪声的抑制是控制器设计中的一个重要问题。在控制器内植入反映干扰或噪声动态特性的一个内模，用以抑制干扰或噪声的思想应是通用的。

•有关变换中的不变量的概念，例如系统等价变换中的不变量，反馈中的不变量等等，应始终受到关注。事实上，它是某种变换群的本质的一个反映，在控制理论研究中起着重要作用。

•实践的观点。Nyquist 稳定判据的产生就是一个很好的例子。正是为克服当时通信网络中使用的负反馈放大器的自激振荡，才激发 Nyquist 的研究兴趣，从而有了 Nyquist 稳定判据的发现。

从 20 世纪 60 年代以来线性系统控制理论发展的历史可以看出，理论和应用之间还存在着某种“沟隙”，即理论上的进一步深化常常并不能给控制工程实践带来帮助。这里，一个重要的原因很可能是，控制器的设计常是纯粹地基于并不精准或无法精准的数学模型的，而并未充分地注意到模型、数据信息、知识挖掘和智能的兼顾与融合。古典的 PID 控制之所以有经久不衰的生命力，其主要原因是，它基本上是基于系统输出误差和工程师的经验，而并不是主要地基于模型。20 世纪 90 年代中期我国学者韩京清所开创的自抗扰控制技术则是 PID 的一个创造性发展，近 20 年来在他及其合作者郭宝珠、高志强、黄一等人的共同努力下，无论在理论与应用层面均取得长足进展[28-29]。自抗扰控制器的主要优点在于：它用系统输出在线估计其不确定性，并用输出反馈将其抵消。比较 20 世纪 80 年代发展起来的鲁棒控制，后者（鲁棒控制）设计控制器时要面对系统不确定性框架内最坏的情形，作最坏的打算，而前者（自抗扰控制）则不需要。这是一种有很强生命力的设计方法，近 20 年来它在工程控制领域的实践也证明了这一点。

黄琳院士在文[30]中指出，“在信息丰富时代，控制系统常常与信息采集、信息传输、信息融合与信息加工处理密不可分，控制理论的发展应充分考虑这一特点，并充分考虑与利用信息科学在这方面的进展。”。这应是努力的方向，我们当为之努力。

致谢 本文写作过程中曾得到北京理工大学马宏宾教授的热忱帮助，兹致以深切谢意。

参考文献

[1] MacFarlane A G J (ed.), Frequency- Response Methods in Control Systems, IEEE Press, New York, 1979.

[2] Bode H W. Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1945.

[3] Horowitz I M. Synthesis of Feedback Systems, Academic Press, New York, 1963.

[4] Tsien I M. Engineering Cybernetics, McGraw–Hill, New York, 1954.
[5] Kailath T. Linear Systems, Prentice–Hall, Englewood, Cliffs, NJ, 1980.
[6] 黄琳、郑应平、张迪，李雅普诺夫第二方法与最优控制器分析设计问题，自动化学报，Vol.2, pp.202–218, 1964.
[7] Wonham W M. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Springer–Verlag, New York, 1st ed. 1974; 2nd ed. 1979.
[8] Anderson B D O and Moore J B. Linear Optimal Control, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.
[9] Kwakernaak H and Sivan R. Linear Optimal Control Systems, Wiley, New York, 1972.
[10] Rosenbrock H H. Computer–Aided Control Systems Design, Academic Press, London, 1974.
[11] Sain M K, et al. (ed.), Special Issue on Linear Multivariable Control Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC–26, No.1, 1981.
[12] Emre E and Hautus M L J. A polynomial chara–cterization of (A,B)–invariant and reachability subspaces, SIAM J. Contr. Optimiz., Vol.18, pp.420–436, 1980.
[13] Wolovich W A. Linear Multivariable Systems, Springer–Verlag, New York, 1974.
[14] Postlethwaite I and MacFarlane A G J. A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems, Springer–Verlag, Berlin, 1979.
[15] Hung Y S and MacFarlane A G J. Multivariable Feedback: A Quasiclassical Approach, Springer–Verlag, New York, 1982.
[16] Zhou K, Doyle J C and Glover K. Robust and Optimal Control, Printice–Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
[17] Kalman R E, Falb P L and Arbib M A. Topics in Mathematical System Theory, McGraw Hill, New York, 1969.
[18] Emre E. Generalized model matching and (F, G)–invariant submodules for linear systems over rings, Linear Algebra and Its Appl., Vol.50, pp.133–166, 1983.

[19] Desoer C A and Gündes A N. Decoupling linear multiinput multioutput plants by dynamic output feedback: an algebraic theory, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC–31, pp.744–750, 1986.

[20] Descusse J. Block noninteracting control with (non) regular static state feedback: a complete solution, Automatica, Vol.27, pp.883–886, 1991.

[21] Davison E J and Goldenberg A. Robust control of a general servomechanism problem: the servocompensator, Automatica, Vol.11, pp.461–472, 1975.

[22] Anderson B D O. Bode Prize Lecture(Control design: moving from theory to practice), IEEE Control Systems, Vol.13, No.4, pp.16–25, 1993.

[23] Athans M, et al.(ed.), Special Issue on Linear–Quadratic–Gaussian Problem, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC–16, No.6, 1971.

[24] Doyle J C. Guaranteed margins for LQG regulators, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC–23, pp.756–757, 1978.

[25] Seron M M, Braslavsky J H and Goodwin G C. Fundamental Limitations in Filtering and Control, Springer–Verlag, London, 1997.

[26] Chen J, Hara S, Qiu L and Middleton R H. Best achievable tracking performance in sampled–data systems via LTI controllers, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC–53, pp.2467–2479, 2008.

[27] Guo L. Exploring the Capability and Limits of the Feedback Mechanism, in Proc. ICM2002, Beijing, Vol. 3 pp.785–794, 2002.

[28] 韩京清，自抗扰控制技术：估计补偿不确定因素的控制技术，国防工业出版社，北京，2008.

[29] 郭宝珠，月明图们忆先生，系统与控制纵横，Vol.1, No.2, pp.58–63, 2014.

[30] 黄琳，为什么做，做什么和发展战略——控制科学学科发展战略研讨会约稿前言，自动化学报，Vol.39, pp.97–100, 2013.