CCC 2021 July 26-28, Shanghai, China

State-space Approaches
VS
Fully Actuated System Approaches

段 广 仁（Guang-Ren Duan）

中国科学院院士, FIEEE, FIET, FCAA

Center for Control Theory and Guidance Technology
Harbin Institute of Technology

哈爾濱工業大學

个人主页 http://homepage.hit.edu.cn/duanguangren

Acknowledgment

- 7 years of absence
- The working language.

Abbreviations

Abbreviations	**English**	**中文**
SS	State-space	状态空间
SSS	State-space system	状态空间系统
SSA	State-space approach	状态空间方法
UAS	Under actuated system	欠驱系统
FA	Fully actuated	全驱的
FAS	Fully actuated system	全驱系统
FASA	FAS approach	全驱系统方法
HOFA	High-order FA	高阶全驱的

汇报提纲

汇报提纲

I. Introduction

II. Fully actuated system approaches

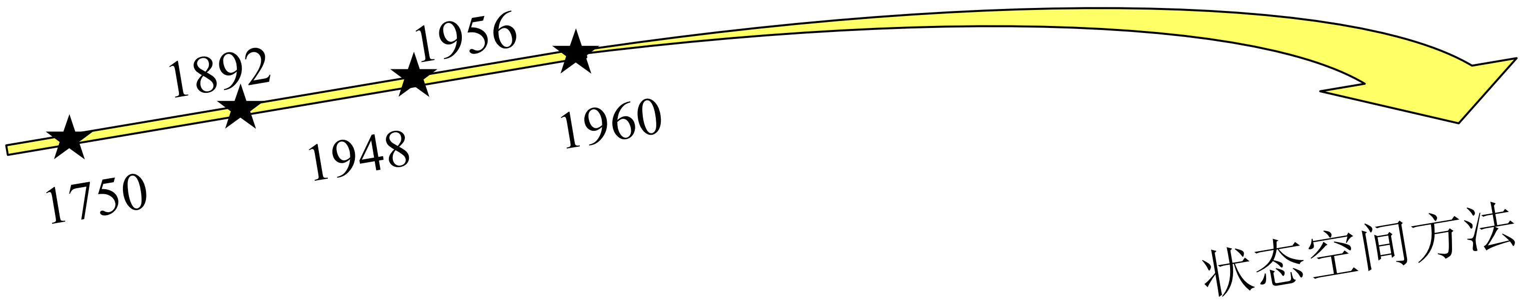
III. Modelling

IV. Powerfulness

V. Difference from feedback linearization

VI. Concluding remarks

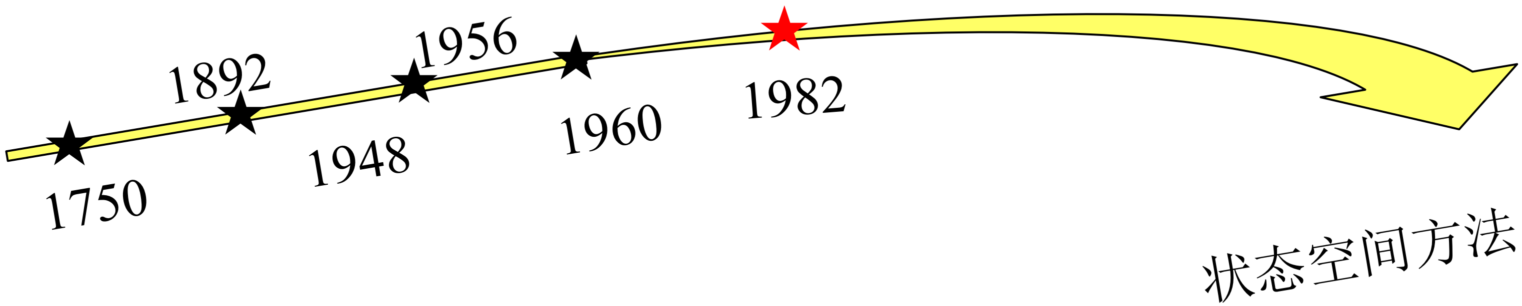
State-space approaches（SSAs）



1750	Sprouting
1892	Lyapunov stability
1950-1960:	Flourishing
1960-1980:	Fruitful results on linear systems
1980-	Encountering difficulties in nonlinear systems

下面请看几个事实

1982



John Casti，美国数学家，动态规划创始人Richard Bellman 的学生

综述论文

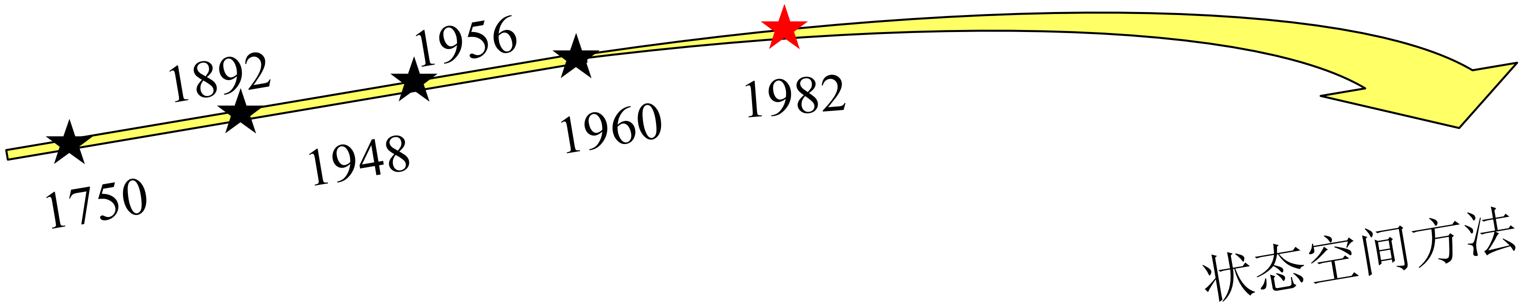
SIAM Review
Vol. 24, No. 2, July 1982

0036–1445/82/2403–0004 $01.00/0

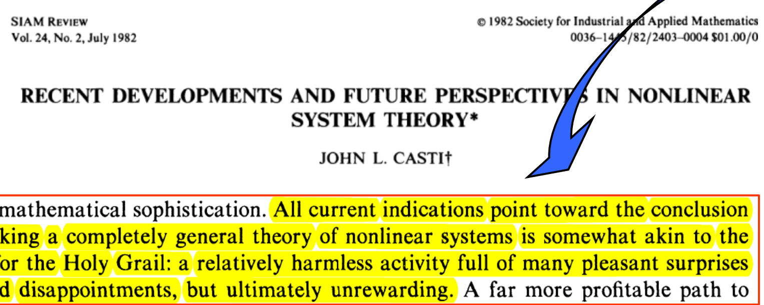
level of mathematical sophistication. All current indications point toward the conclusion that seeking a completely general theory of nonlinear systems is somewhat akin to the search for the Holy Grail: a relatively harmless activity full of many pleasant surprises and mild disappointments, but ultimately unrewarding. A far more profitable path to

(高为炳, 程勉, 夏小华. 非线性控制系统的发展. 自动化学报, **17**(5): 513--524)
Casti J L. Recent Development and Future Perspectives in Nonlinear System Theory, *SIAM Review*, 1982, **24**(3): 301--331

1982



John Casti，美国数学家，动态规划创始人Richard Bellman 的学生综述论文



SIAM REVIEW
Vol. 24, No. 2, July 1982

© 1982 Society for Industrial and Applied Mathematics
0036-1445/82/2403-0004 $01.00/0

RECENT DEVELOPMENTS AND FUTURE PERSPECTIVES IN NONLINEAR SYSTEM THEORY*

JOHN L. CASTI†

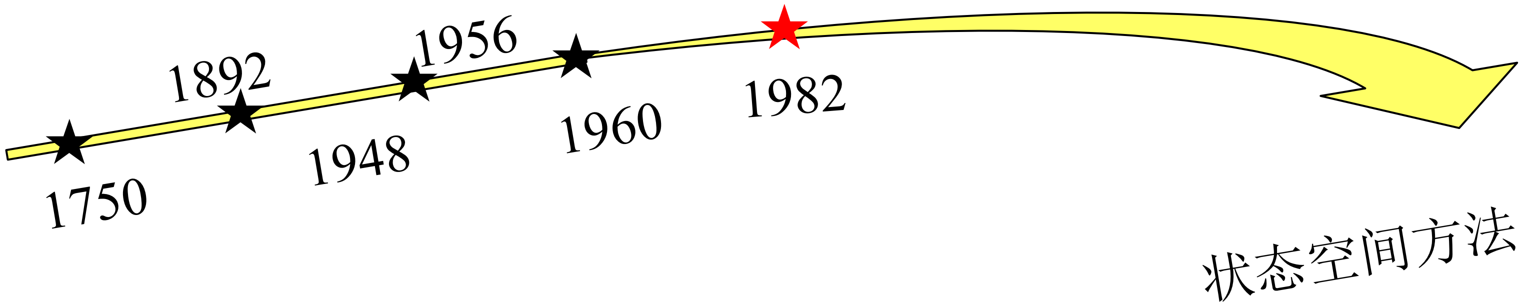
level of mathematical sophistication. All current indications point toward the conclusion that seeking a completely general theory of nonlinear systems is somewhat akin to the search for the Holy Grail: a relatively harmless activity full of many pleasant surprises and mild disappointments, but ultimately unrewarding. A far more profitable path to

高为炳院士，
我国著名控制理论专家

“目前所有的迹象都指向这样一个结果：寻找一个完全通用的非线性系统理论有点类似于寻找圣杯，是相对无害的活动。充满了许多愉快的意外和轻微的失望，而最终则是白费力气”。

(高为炳，程勉，夏小华. 非线性控制系统的发展. 自动化学报, **17**(5): 513--524)
Casti J L. Recent Development and Future Perspectives in Nonlinear System Theory, *SIAM Review*, 1982, **24**(3): 301--331

1982



John Casti，美国数学家，动态规划创始人Richard Bellman 的学生综述论文

SIAM Review
Vol. 24, No. 2, July 1982

© 1982 Society for Industrial and Applied Mathematics

高为炳院士，
我国著名控制理论专家

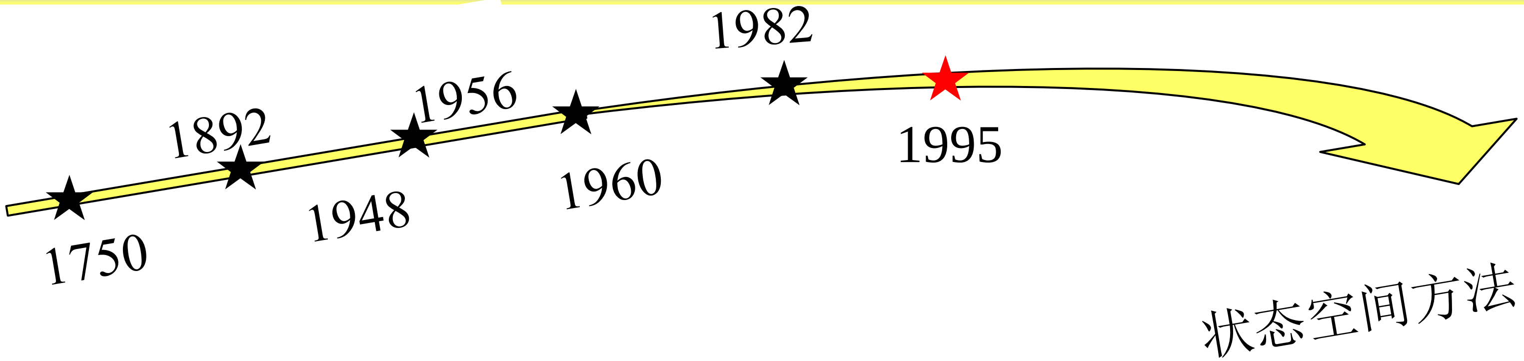
“目前所有的迹象都指向这样一个结果：

统理论有
害的活动
致的失望

- “*A far more profitable path to follow is to concentrate upon special classes of nonlinear problems, ….*”
- 今天大多数非线性系统的结果都集中在特殊类型的系统上

非线性控制系统的发展. 自动化学报, **17**(5): 513--524)
Casti J L. Recent Development and Future Perspectives in Nonlinear System Theory, *SIAM Review*, 1982, **24**(3): 301--331

1995

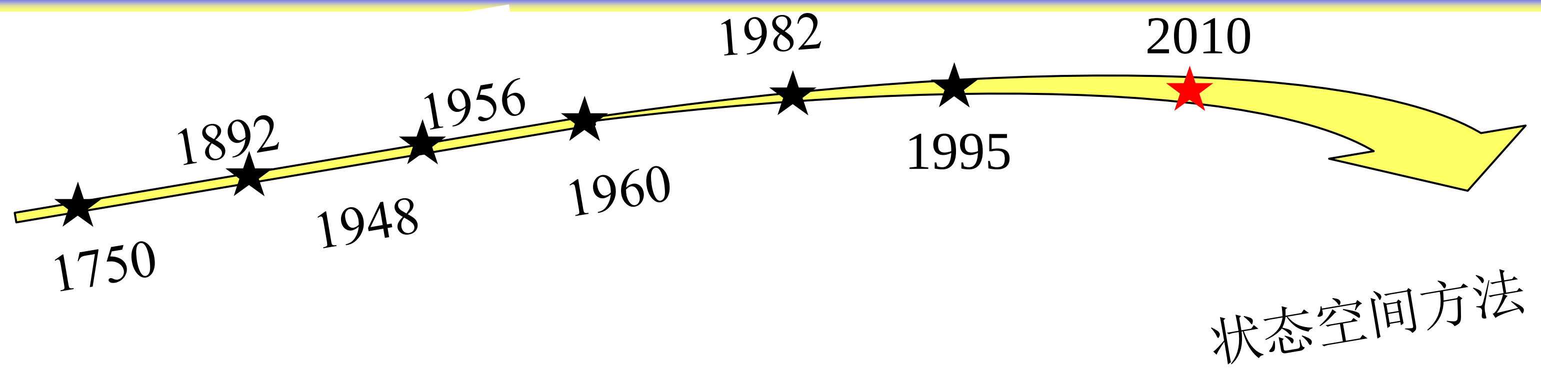


Edward Davison，加拿大工程院院士

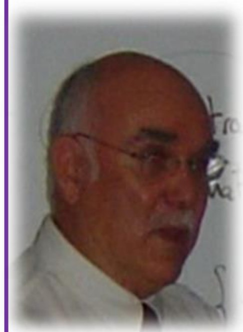
- “I believe control theory is just in its infancy”.
- “Nonlinear systems theory, almost everything [is open]”

Blongdel V, Gevers M, Lindquist A. Survey on the state of systems and control. *European Journal of Control*, 1995, **1**(1):1--5

2010“控制将死论” - Control Is Dead



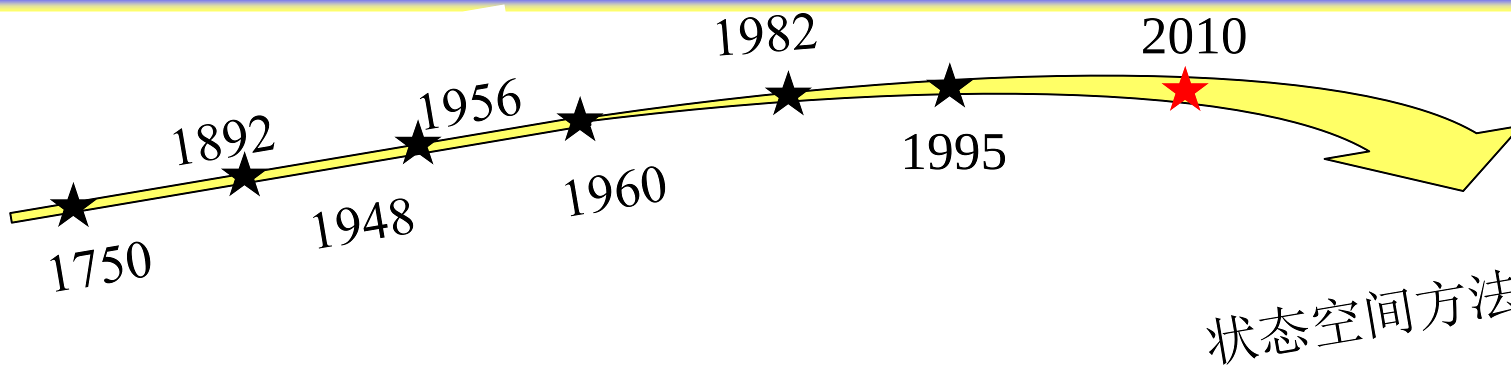
“Control is dead”的字样曾出现在许多重要的学术场合



– G. Goodwin, 澳大利亚科学院院士、瑞典皇家科学院外籍院士、国际控制理论界著名学者

– 公开在国际会议的大会报告讲演中提及这一观点

2010“控制将死论” - Control Is Dead



"Control is dead"的字样曾出现在许多重要的学术场合

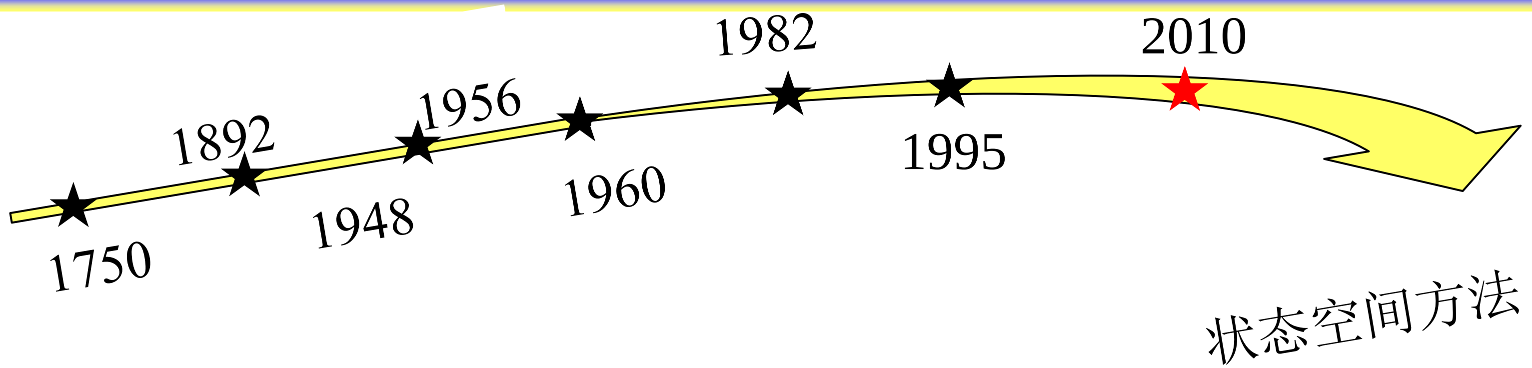
– G. Goodwin, 澳大利亚科学院院士、瑞典皇家科学院外
籍

– 公

值得特别强调的是

- "控制将死论"指的是控制理论。控制本身具有无限广大的应用空间，永远不会死！
- 这里本意是说"Control theory is dead"!

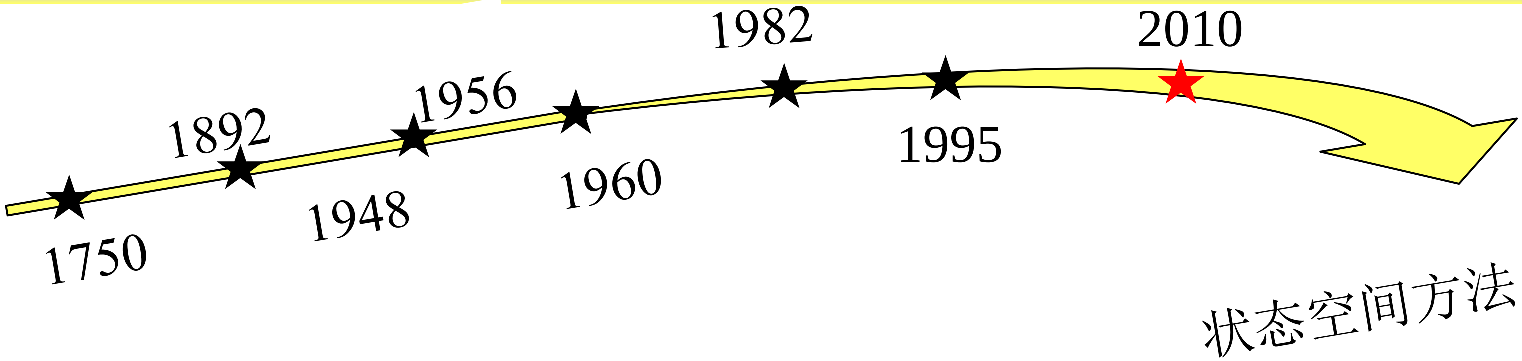
2010“控制将死论”- Control Is Dead



何毓琦, 哈佛大学终身教授、美国工程院院士、中国科学院和工程院外籍院士、控制理论著名专家

- 控制已经到了成熟阶段，很难再有大的突破。

2010“控制将死论” - Control Is Dead

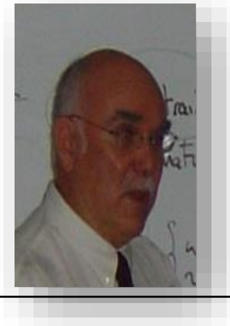


new approach. Same thing need to happen again. “Control is dead” until it is reborn like Lazarus by a Jesus miracle. In this sense, one can argue CONTROL is certainly not dead and now may be waiting for the “second coming” of another golden age of control. But chances are it won’t be from extending the current mature theory.

- 控制已死，要重生就要等待类似于耶稣使拉萨路复活的那种奇迹发生。
- 或许是在等待另一个黄金时代的再次出现，
- 但这种机会不会来自对现有成熟理论的拓展。

这些事实告诉我们什么？



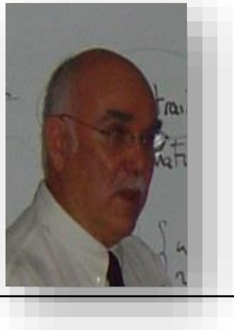




- I did not say anything!
- What is more, what I said would not matter much!
- It is them who have said something which indicate at least the fact that

  "State-space control theory has entered into a hard time! "

这些事实告诉我们什么？




- I did not say anything!
- What is more, what I said would not matter much!
- It is them who have said something which indicate at least the fact that

  "State-space control theory has entered into a hard time! "

Are there new ways?

Yes, there is one!

高阶全驱系统理论
Fully actuated system approach（FASA）

自动化学报“高阶系统方法”系列

1. 段广仁. 高阶系统方法—I. 全驱特性与参数化设计. 自动化学报, 2020, 41(7): 1333–1345

2. 段广仁. 高阶系统方法—II. 能控性与全驱性. 自动化学报, 2020, 46(8): 1571–1581

3. 段广仁. 高阶系统方法—III. 能观性与观测器设计. 自动化学报, 2020, 46(8): 1885–1895

国际系统科学杂志 （Int. J. System Science）
High-order fully actuated system approaches 系列

Part I. Models and basic procedure, 2021, 52(2): 422-435.
- *DOI:10.1080/00207721.2020.1829167*

Part II. Generalized strict-feedback systems, 2021, 52(3): 437-454.
- *DOI:10.1080/00207721.2020.1829168*

Part III. Robust control and high-order backstepping, 2021, 52(5), 952-971
- *DOI:10.1080/00207721.2020.1849863*

Part IV. Adaptive control and high-order backstepping, 2021, 52(5), 972-989.
- *DOI:10.1080/00207721.2020.1849864*

Part V. Robust adaptive control.
- *DOI:10.1080/00207721.2021.1879964*

Part VI. Disturbance attenuation and decoupling.
- *DOI:10.1080/00207721.2021.1879966*

Part VII. Controllability, stabilizability and parametric design.
- *DOI:10.1080/00207721.2021.1921307*

Part VIII. Optimal control with application in spacecraft attitude stabilization.
- *DOI:10.1080/00207721.2021.1937750*

Part IX. Generalized PID control and model reference tracking.

Part X. Basics of discrete-time systems.

高阶全驱系统理论
Fully actuated system approach （FASA）

自动化学报“高阶系统方法”系列

1. 段广仁. 高阶系统方法—I. 全驱特性与参数化设计. 自动化学报, 2020, 41(7)：1333–1345
2. 段广仁. 高阶系统方法—II. 能控性与全驱性. 自动化学报, 2020, 46(8)：1571–1581
3. 段广仁. 高阶系统方法—III. 能观性与观测器设计. 自动化学报, 2020, 46(8)：1885–1895

– 提出高阶全驱系统的概念并给出其参数化设计方法

– 建立了能控性和全驱性的关系

– 提出了全检测性和观测器设计方法

发表于2020年

高阶全驱系统理论

Fully actuated system approach （FASA）

国际系统科学杂志 （Int. J. System Scinece）
High-order fully actuated system approaches 系列

Part I. Models and basic procedure, 2021, 52(2): 422-435.
- *DOI:10.1080/00207721.2020.1829167*

Part II. Generalized strict-feedback systems, 2021, 52(3): 437-454.
-*DOI:10.1080/00207721.2020.1829168*

Part III. Robust control and high-order backstepping, 2021, 52(5), 952-971
- *DOI:10.1080/00207721.2020.1849863*

Part IV. Adaptive control and high-order backstepping, 2021, 52(5), 972-989.
- *DOI:10.1080/00207721.2020.1849864*

Part V. Robust adaptive control.
- *DOI:10.1080/00207721.2021.1879964*

Part VI. Disturbance attenuation and decoupling.
- *DOI:10.1080/00207721.2021.1879966*

Part VII. Controllability, stabilizability and parametric design.
- *DOI:10.1080/00207721.2021.1921307*

Part VIII. Optimal control with application in spacecraft attitude stabilization.
- *DOI:10.1080/00207721.2021.193775*

Part IX. Generalized PID control and model reference t

Part X. Basics of discrete-time systems.

- 模型与设计
- 广义严反馈系统
- 鲁棒控制与反步法
- 自适应控制与反步法
- 鲁棒自适应控制
- 干扰抑制与解耦
- 能控性与可稳性
- 最优控制与应用

发表于2021年，前8篇已发

平均每篇长达20多页（双栏

全驱系统方法杂文/报告系列

Essay/report series on FASA

1. 《状态空间方法vs全驱系统方法（I）
   ——从全局镇定问题看两种方法论》；
2. 《状态空间方法vs全驱系统方法（II）
   ——从能控性问题看两种方法论》；
3. 《状态空间方法vs全驱系统方法（III）
   ——从闭环线性化看两种方法论》；
4. 《状态空间方法vs全驱系统方法（IV）
   ——从综合能力看两种方法论（第一部分）》；
5. 《状态空间方法vs全驱系统方法（IV）
   ——从综合能力看两种方法论（第二部分）》。

全驱系统方法杂文/报告系列

Essay/report series on FASA

1. 《状态空间方法vs全驱系统方法（I）
 ——从全局镇定问题看两种方法论》；
2. 《状态空间方法vs全驱系统方法（II）
 ——从能控性问题看两种方法论》；
3. 《状态空间方法vs全驱系统方法（III）
 ——从闭环线性化看两种方法论》；
4. 《状态空间方法vs全驱系统方法（IV）
 ——从综合能力看两种方法论（第一部分）》；
5.

Today's report is a selection from these

汇报提纲

汇报提纲

II. Fully actuated system approaches

2.1 Motivation √

2.2 From physical to mathematical

物理全驱系统（physical FAS）

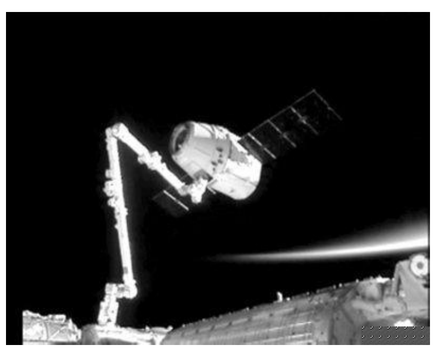
有那么一类系统，它们贵族般地存在，它们得天独厚，与众不同。它们广泛存在于机械、航天等领域

——全驱系统 Fully actuated system (FAS)

物理特征：每个自由度都有执行器来控制！如

机械臂的每个关节都有电机控制

卫星的每个旋转方向上都有飞轮控制

Models of FAS

伪线性形式：

Lagraigian 系统

$$\boxed{M(x,\dot{x},t)\ddot{x}+D(x,\dot{x},t)\dot{x}+K(x,\dot{x},t)x=u}$$

广义质量矩阵可逆

控制变量完全暴露

Models of FAS

伪线性形式：

Lagraigian 系统

$$M(x,\dot{x},t)\ddot{x} + D(x,\dot{x},t)\dot{x} + K(x,\dot{x},t)x = u$$

广义质量矩阵可逆

控制变量完全暴露

二阶非线性形式：

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + B(x,\dot{x},t)u$$

控制分布矩阵

控制分布矩阵是一个可逆方阵

Control of FAS

$$\boxed{\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + B(x, \dot{x}, t)u}$$

可逆

得天独厚的控制特性：

$$u = -B^{-1}(\cdot)[A_1\dot{x} + A_0 x + f(x, \dot{x}, t) - v]$$

$$\ddot{x} + A_1\dot{x} + A_0 x = v$$

——闭环系统为线性，且特征多项式可以任意配置！

Control of FAS

$$\boxed{\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + B(x,\dot{x},t)u}$$

可逆

得天独厚的控制特性：

$$u = -B^{-1}(\cdot)[A_1\dot{x} + A_0 x + f(x,\dot{x},t) - v]$$

$$\ddot{x} + A_1\dot{x} + A_0 x = v$$

——闭环系统为线性，且特征多项式可以任意配置！

——The best result, better than global stability,

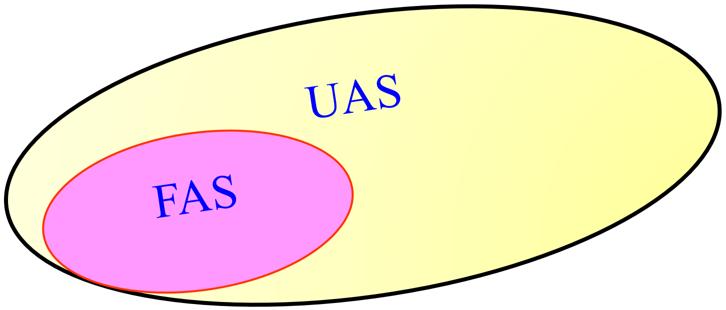
better than exponentially global stability！

The world would be great if every system is a FAS！

可是，很遗憾

尽管全驱系统如此之好，只可惜太少！

这个世界上还有很多的欠驱系统，如柔性机械臂和挠性卫星

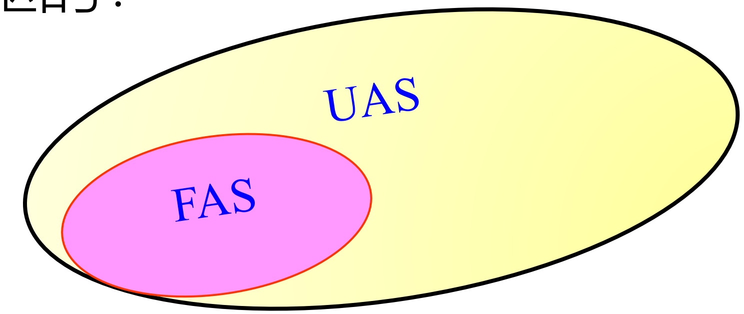


可是，很遗憾

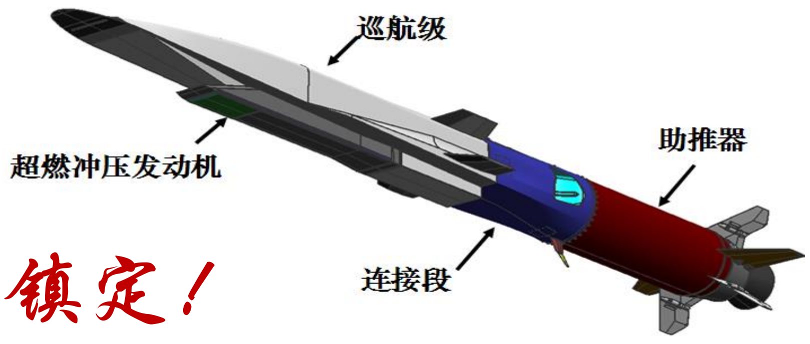
尽管全驱系统如此之好，只可惜太少！

这个世界上还有很多的欠驱系统，如柔性机械臂和挠性卫星

甚至连刚体飞行器的控制系统都是欠驱的：



- 6个自由度：
  - 姿态：攻角，侧滑角，滚转角，
  - 位置：前向、侧向、纵向
- 4个控制量：
  - 三个方向的舵偏角、推力（油门）



这些系统一般还不能全局镇定！

逆向思维（Inverse thinking）

When most people are converting the model of a physical system into a first-order SS model, we are thinking inversely

1. 能不能从数学的角度出发多造出一些高阶全驱系统来呢！

   Can we create more high-order FAS mathematically?

2. 欠驱系统能不能在数学的意义下化成全驱系统呢！

   If yes, can a physically UAS be converted into a mathematical FAS?

These lead to the generalization!

汇报提纲

II. Fully actuated system approaches

2.1 Motivation

2.2 From physical to mathematical √

First-order systems

$$\dot{X} = A\left(X,t\right)X + B\left(X,t\right)u$$

Requiring the B matrix to be square and nonsingular is generally unreasonable

First-order systems

$$\dot{X} = A(X,t)X + B(X,t)u$$

Requiring the B matrix to be square and nonsingular is generally unreasonable

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0(X,t) & -A_1(X,t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ B_0(X,t) \end{bmatrix} u$$

However, requiring the B_0 matrix to be square and nonsingular may be reasonable

一种等价关系（An equivalence）

变量增广

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0(X,t) & -A_1(X,t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ B_0(X,t) \end{bmatrix} u$$

消元升阶

$$\ddot{x} + A_1(x,\dot{x},t)\dot{x} + A_0(x,\dot{x},t)x = B_0(x,\dot{x},t)u$$

一阶欠驱系统可以转化为一个二阶的全驱系统！

一种尴尬（An embarrassment）

变量增广

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0(X,t) & -A_1(X,t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ B_0(X,t) \end{bmatrix} u$$

消元升阶

$$\ddot{x} + A_1(x,\dot{x},t)\dot{x} + A_0(x,\dot{x},t)x = B_0(x,\dot{x},t)u$$

我们曾把太多的二阶全驱系统化成状态空间模型求解！

破坏了系统的全驱性，降低了问题解的品质，

如空间交会问题；

机器人领域的认识与实践。

一种引申（An indication）

变量增广

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0(X,t) & -A_1(X,t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ B_0(X,t) \end{bmatrix} u$$

消元升阶

$$\ddot{x} + A_1(x,\dot{x},t)\dot{x} + A_0(x,\dot{x},t)x = B_0(x,\dot{x},t)u$$

- A first-order UAS is equivalent to a second-order FAS
- What would be the general case?
  - Can a first-order UAS be converted into a third-order FAS?
  - Can a second-order UAS be converted into a higher order FAS?

—*These questions lead to our extension…*

The extension (Mathematical FAS)

控制分布矩阵

高阶全驱（HOFA）系统：

$$x^{(m)} = f\left(x^{(0\sim m-1)}, \zeta, t\right) + B\left(x^{(0\sim m-1)}, \zeta, t\right)u$$

where

$$x^{(0\sim m-1)} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(m-1)} \end{bmatrix} \qquad \zeta = \begin{bmatrix} x^{(0\sim m-1)}(t-\tau_1) \\ x^{(0\sim m-1)}(t-\tau_2) \\ \vdots \\ x^{(0\sim m-1)}(t-\tau_p) \end{bmatrix}$$

控制分布矩阵B是一个可逆矩阵

段广仁（I）,Duan（I,VII,X）

Control of FAS

高阶全驱（HOFA）系统：

$$x^{(m)} = f(x^{(0\sim m-1)},\zeta,t) + B(x^{(0\sim m-1)},\zeta,t)u$$

控制律：

$$\boxed{u = -B^{-1}(x^{(0\sim m-1)},\zeta,t)\left[A_{0\sim m-1}x^{(0\sim m-1)} + f(x^{(0\sim m-1)},\zeta,t) - v\right]}$$

闭环系统

$$x^{(m)} + A_{0\sim m-1}x^{(0\sim m-1)} = v \qquad A_{0\sim m} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_m \end{bmatrix}$$

——闭环系统为线性，且特征多项式可以任意配置！

——全局指数镇定！

段广仁（I）,Duan（I,VII,X）

全驱系统—非仿射情形（Non-affine FAS）

微分同胚
homeomorphism

高阶全驱（HOFA）系统

$$x^{(m)} = f(x^{(0\sim m-1)}, \zeta, t) + g(x^{(0\sim m-1)}, \zeta, u, t)$$

控制律

$$\begin{cases} u = -g^{-1}(w) \\ w = A_{0\sim m-1} x^{(0\sim m-1)} + f(x^{(0\sim m-1)}, \zeta, t) - v \end{cases}$$

闭环系统

$$x^{(m)} + A_{0\sim m-1} x^{(0\sim m-1)} = v$$

——闭环特征多项式可以任意配置！

全驱系统—多阶情形（Multiple order FAS）

$$\begin{bmatrix} x_1^{(n_1)} \\ x_2^{(n_2)} \\ \vdots \\ x_m^{(n_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\left(x_k^{(0\sim n_k-1)}\Big|_{k=1\sim m}, \zeta, t\right) \\ f_2\left(x_k^{(0\sim n_k-1)}\Big|_{k=1\sim m}, \zeta, t\right) \\ \vdots \\ f_m\left(x_k^{(0\sim n_k-1)}\Big|_{k=1\sim m}, \zeta, t\right) \end{bmatrix} + B\left(x_k^{(0\sim n_k-1)}\Big|_{k=1\sim m}, \zeta, t\right) u$$

where

$$x_k^{(0\sim n_k-1)}\Big|_{k=1\sim m} = \begin{bmatrix} x_1^{(0\sim n_1)} \\ x_2^{(0\sim n_2)} \\ \vdots \\ x_m^{(0\sim n_m)} \end{bmatrix}$$

In contrast, the former one is called single-order FAS.

In the following we will use only the single-order affine FAS for demonstration!

汇报提纲

I. Introduction

II. Fully actuated system approaches

III. Modelling

IV. Powerfulness

V. Difference from feedback linearization

VI. Concluding remarks

汇报提纲

III. Modelling

3.1 From SSS √

3.2 From physical laws

Model conversion

变量增广

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0(X,t) & -A_1(X,t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ B_0(X,t) \end{bmatrix} u$$

消元升阶

$$\ddot{x} + A_1(x,\dot{x},t)\dot{x} + A_0(x,\dot{x},t)x = B_0(x,\dot{x},t)u$$

a second-order FAS and a type of first-order SSS

阶数变低
方程个数变多

变量增广

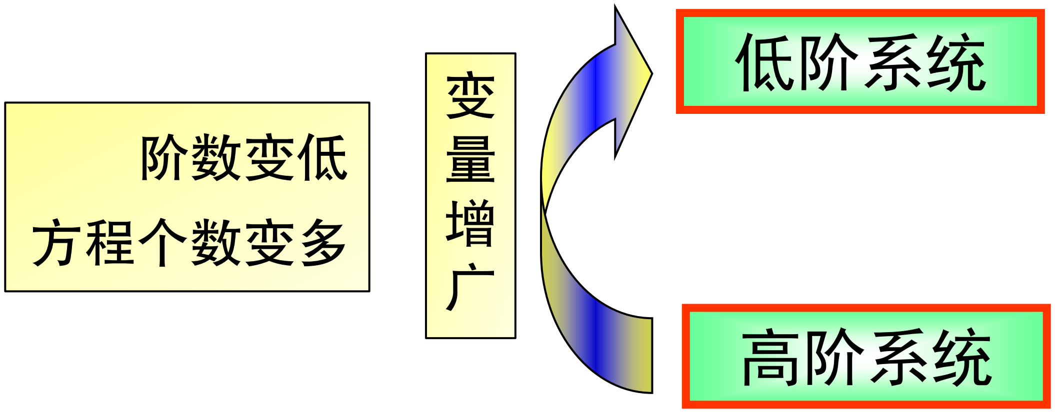
低阶系统

高阶系统

消元升阶

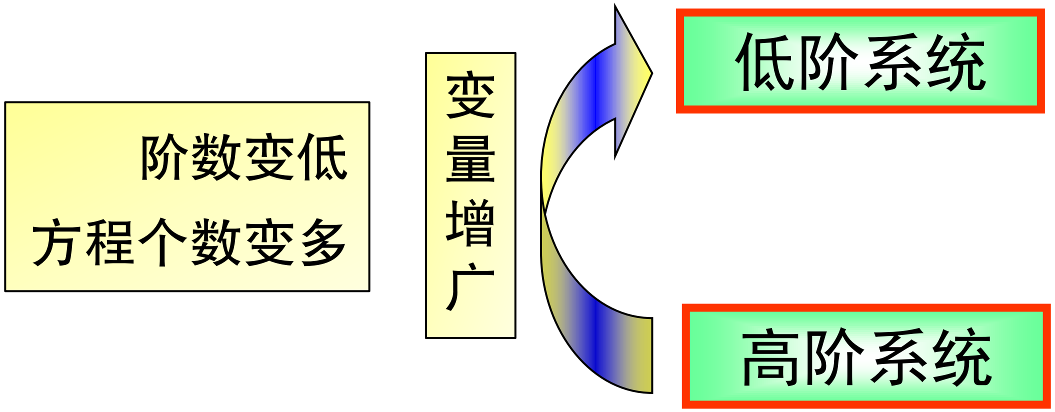
阶数升高
方程个数变少

From high-order to lower order



- Method: variable extension
- Effect: order gets lower but
  the number of equations gets larger
- Final results: get a state-space model with
  the lowest order and the maximal number of equations

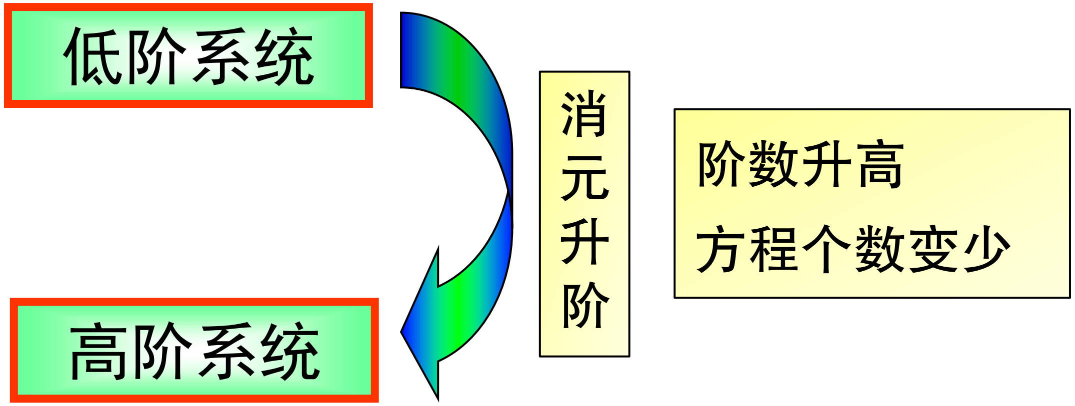
From high-order to lower order



Almost anytime and anywhere

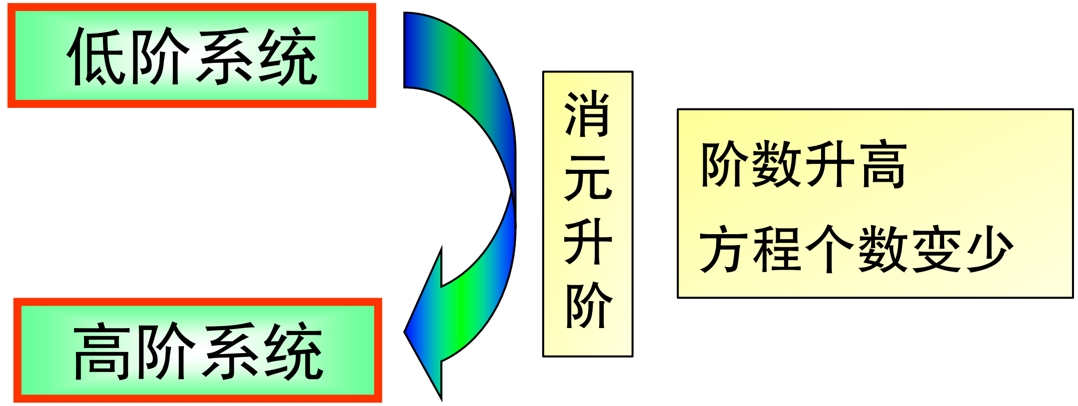
- Method: variable extension
- Effect: order gets lower but
  the number of equations gets larger
- Final results: get a state-space model with
  the lowest order and the maximal number of equations

From low-order to higher order



- Method: variable elimination （with the help of transformation）
- Effect: order gets higher but
  the number of equations gets smaller
- Final results: get a high-order FAS model, with
  the highest order and the minimal number of equations

From low-order to higher order



- Method: variable elimination
- Effect: order gets higher but
  the number of equations gets smaller
- Final results: get a high-order FAS model, with
  the highest order and the minimal number of equations

Seldom done

From SSS to FAS

– 所有的能控线性系统 段广仁（I），Duan（X）

From SSS to FAS

– 所有的能控线性系统 段广仁（I），Duan（X）

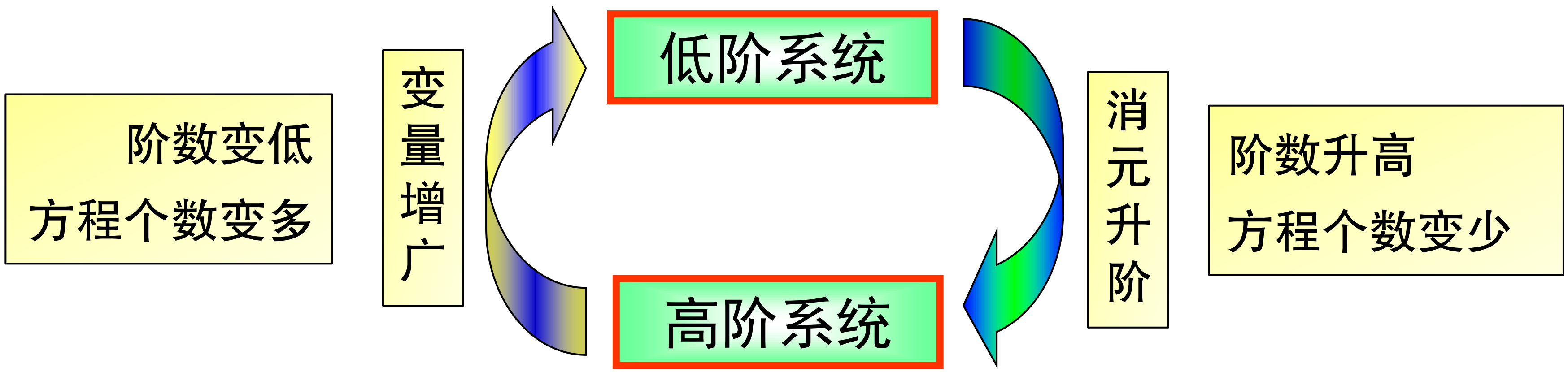
段广仁（II）

– 一类非线性系统能控标准型（高为炳，程勉, 夏小华，1991）

From SSS to FAS

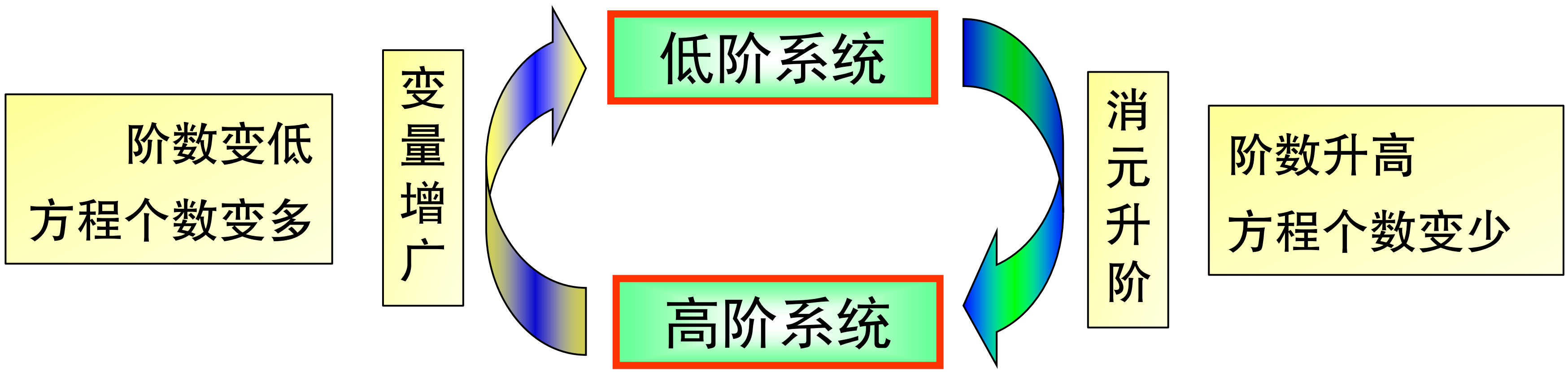
- 所有的能控线性系统 段广仁（I），Duan（X）
- 一类非线性系统能控标准型（高为炳，程勉, 夏小华，1991） 段广仁（II）
- 所有可反馈线性化的非线性系统 段广仁（I），Duan（X）

From SSS to FAS



- 所有的能控线性系统 段广仁（I），Duan（X）
- 一类非线性系统能控标准型（高为炳，程勉, 夏小华，1991） 段广仁（II）
- 所有可反馈线性化的非线性系统 段广仁（I），Duan（X）
- 非线性严反馈系统 段广仁（I），Duan（VII,X）

From SSS to FAS



– 所有的能控线性系统 段广仁（I），Duan（X）

– 一类非线性系统能控标准型（高为炳，程勉, 夏小华，1991） 段广仁（II）

– 所有可反馈线性化的非线性系统 段广仁（I），Duan（X）

– 非线性严反馈系统 段广仁（I），Duan（VII,X）

– 更广泛的一类非线性系统 Duan（I）

Example 1- 不可反馈线性化 (Brockett, 1983)

$$
\begin{cases}
\dot{x} = u \\
\dot{y} = v \\
\dot{z} = xy
\end{cases}
$$

A famous example!

x和y的对称性

Brockett, R. W. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization. Differential Geometric Control Theory, Birkhauser, Boston, 112-121.

Example 1- 不可反馈线性化 (Brockett, 1983)

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

x和y的对称性

Model 1 : $\boxed{\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{z}}{x} & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}$ if $x \neq 0$

Model 2 : $\boxed{\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & \frac{\dot{z}}{y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}$ if $y \neq 0$

Brockett, R. W. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization. Differential Geometric Control Theory, Birkhauser, Boston, 112-121.

汇报提纲

III. Modelling

3.1 From SSS

3.2 From physical laws √

Modelling by mechanism

Modelling by mechanism (simple cases)

- 牛顿定律（Newton’s Law）

$$\boxed{m\ddot{x} = u}$$

$$\boxed{M(x,\dot{x},t)\ddot{x} + D(x,\dot{x},t)\dot{x} + K(x,\dot{x},t)x = u}$$

Modelling by mechanism (simple cases)

- 牛顿定律（Newton's Law）
- 动量定理（Theorem of Linear Momentum）

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i\right) = u}$$

$$\boxed{M(x,\dot{x},t)\ddot{x} + D(x,\dot{x},t)\dot{x} + K(x,\dot{x},t)x = u}$$

Modelling by mechanism (simple cases)

- 牛顿定律（Newton’s Law）
- 动量定理（Theorem of Linear Momentum）
- 动量矩定理（Theorem of Angular Momentum）

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \times m_i \dot{x}_i\right) = u}$$

$$\boxed{M(x,\dot{x},t)\ddot{x} + D(x,\dot{x},t)\dot{x} + K(x,\dot{x},t)x = u}$$

Modelling by mechanism (simple cases)

- 牛顿定律（Newton’s Law）
- 动量定理（Theorem of Linear Momentum）
- 动量矩定理（Theorem of Angular Momentum）
- 拉格朗日方程（Lagrange Equation）

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=u_k,\quad k=1,2,\cdots,s}$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{r}_i^2 \qquad r_i=r_i\left(q_1,q_2,\cdots,q_s,t\right),\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)+F(\dot{q})+T_d=\tau$$

Modelling by mechanism (simple cases)

- 牛顿定律（Newton's Law）
- 动量定理（Theorem of Linear Momentum）
- 动量矩定理（Theorem of Angular Momentum）
- 拉格朗日方程（Lagrange Equation）
- 基尔霍夫（电压）定律（Kirchhoff's Law of Voltage）

控制电压

$$\boxed{LC\ddot{x} + RC\dot{x} + x = u}$$

电容两端的电压

Modelling by mechanism (simple cases)

- 牛顿定律（Newton's Law）
- 动量定理（Theorem of Linear Momentum）
- 动量矩定理（Theorem of Angular Momentum）
- 拉格朗日方程（Lagrange Equation）
- 基尔霍夫（电压）定律（Kirchhoff's Law of Voltage）
- 基尔霍夫（电流）定律（Kirchhoff's Law of Current）

控制电流

$$\boxed{LC\ddot{x} + \frac{L}{R}\dot{x} + x = u}$$

通过电感的电流

柔性体受迫振动的波动方程

三维纵向波动方程

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - k^2(x,y,z,t)\Delta v = u(x,y,z,t)$$

其中$\boldsymbol{v}$是波动，u是施加的作用力，k是系数变量，Δ是拉普拉斯算子：

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

N. H. Ibragimov著，卢琦、杨凯、罗朝俊、胡享平译：现代数学基础《微分法方程与数学题物理问题》，高等教育 出版社，北京，2013

流体力学中的N-S方程

纳维-斯托克斯（Navier-Stokes equations）方程

简称N-S方程，是用于描述流体运动的方程，可以看作是流体运动的牛顿第二定律。对于可压缩的牛顿流体，可以得到

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2}+\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\nabla\dot{\boldsymbol{x}}\right)=-\nabla p+\nabla\cdot\left(\mu\left(\nabla\dot{\boldsymbol{x}}+(\nabla\dot{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\right)-\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{x}})\mathbf{I}\right)+\mathbf{u}}$$

其中$\boldsymbol{x}$是流体位置，p是流体压力，ρ是流体密度，μ是流体动力黏度。式中各项分别对应于惯性力，压力，黏性力，以及作用在流体上的外力。

纳维-斯托克斯方程是由纳维、泊松、圣维南和斯托克斯于1827年到1845年之间推导出来的。

L.普朗特著，郭永怀、陆士嘉译：《流体力学概论》，科学出版社，北京，1981。（L.Plandtl，et al-，Fiihrer Durch die Strö-mungslehre，Fredr.Vieweg and Sohn Braunschweig，1969.）

这就是我们的物理世界!

——由许多的二阶全驱系统来主宰!

为什么偏要化成一阶的状态空间模型呢?

化过去，你又处理不好非线性，得不到好结果!

——多此一举，弄巧成拙!

世界上有多少"原始"的二阶全驱系统?又有多少"原始"的、无需转化可得的一阶状态空间系统?谁更靠近物理世界?谁更靠近实际应用?谁的效果更好?

——答案一目了然!

Modelling by mechanism (Complicated cases)

- 基于这些物理定律进行建模时，首先所获得一系列一阶或二阶微分方程，称为基础方程

$$\begin{cases} J\left(q_1,\dot{q}_1\right)\ddot{q}_1 + D\left(q_1,\dot{q}_1\right)\dot{q}_1 + k\left(q_1 - q_2\right) = 0 \\ J\left(q_1^{(0\sim1)}, q_2^{(0\sim1)}\right)\ddot{q}_2 + D\left(q_1^{(0\sim1)}, q_2^{(0\sim1)}\right)\dot{q}_2 - k\left(q_1 - q_2\right) = u \end{cases}$$

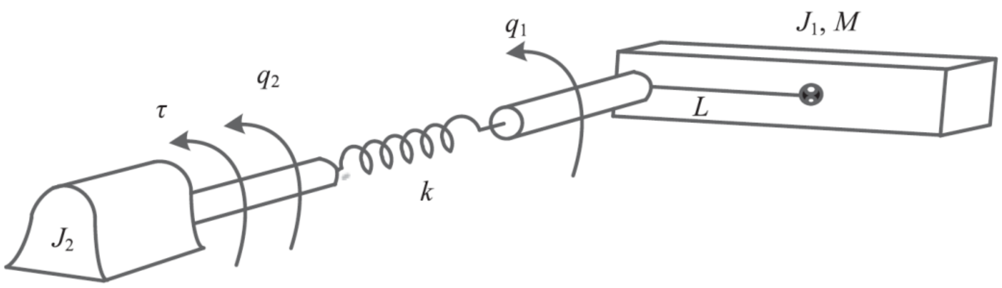


Figure 1. A robot system with elastic joints.

Modelling by mechanism （Complicated cases）

- 基于这些物理定律进行建模时，首先所获得一系列一阶或二阶微分方程，称为基础方程
- 一阶路线（变量增广法、降阶法）- 下行路线

控制科学家和工程师近一个世纪以来一直延用的方法。

Universal!

根深蒂固!

理所当然!

天经地义!

Basic equations

一阶路线

SS models

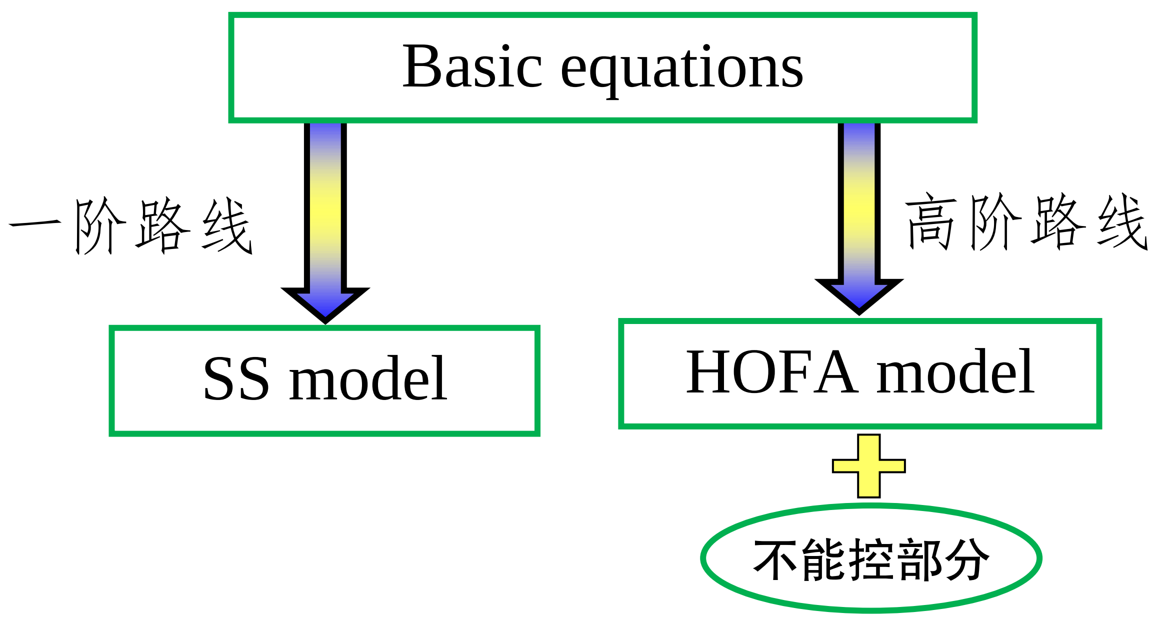
段广仁（I），Duan（I,VII,X）

Modelling by mechanism (Complicated cases)

- 基于这些物理定律进行建模时，首先所获得一系列一阶或二阶微分方程，称为基础方程
- 一阶路线（变量增广法、降阶法）- 下行路线
- 高阶路线（消元法、升阶法）- 上行路线

反其道而行之！

逆向思维，与众不同！



Example 2- A robot system with an elastic joint

$$\begin{cases} J\left(q_1,\dot{q}_1\right)\ddot{q}_1 + D\left(q_1,\dot{q}_1\right)\dot{q}_1 + k\left(q_1 - q_2\right) = 0 \\ J\left(q_1^{(0\sim1)}, q_2^{(0\sim1)}\right)\ddot{q}_2 + D\left(q_1^{(0\sim1)}, q_2^{(0\sim1)}\right)\dot{q}_2 - k\left(q_1 - q_2\right) = u \end{cases}$$

$$q_2 = h(q_1^{(0\sim2)})$$

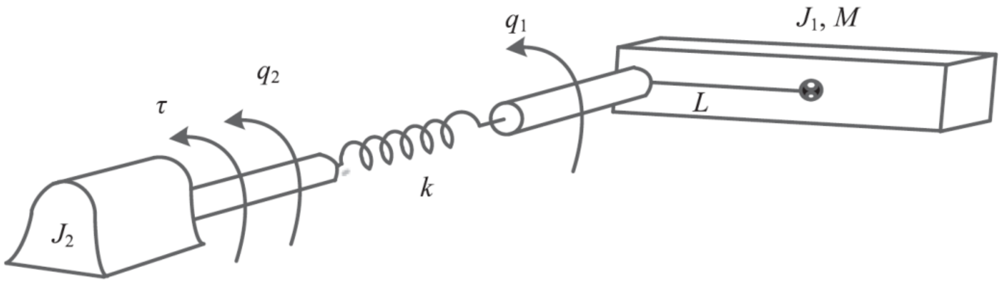


Figure 1. A robot system with elastic joints.

Example 2- A robot system with an elastic joint

$$\begin{cases} J\left(q_1,\dot{q}_1\right)\ddot{q}_1 + D\left(q_1,\dot{q}_1\right)\dot{q}_1 + k\left(q_1 - q_2\right) = 0 \\ J\left(q_1^{(0\sim1)}, q_2^{(0\sim1)}\right)\ddot{q}_2 + D\left(q_1^{(0\sim1)}, q_2^{(0\sim1)}\right)\dot{q}_2 - k\left(q_1 - q_2\right) = u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_2 = h(q_1^{(0\sim3)}) \\ \ddot{q}_2 = h(q_1^{(0\sim4)}) \end{cases}$$

$$q_2 = h(q_1^{(0\sim2)})$$

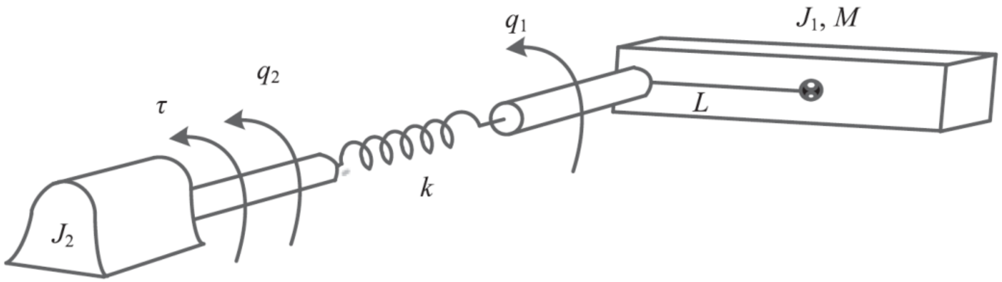


Figure 1. A robot system with elastic joints.

Example 2- A robot system with an elastic joint

$$\begin{cases} J\left(q_1,\dot{q}_1\right)\ddot{q}_1 + D\left(q_1,\dot{q}_1\right)\dot{q}_1 + k\left(q_1 - q_2\right) = 0 \\ J\left(q_1^{(0\sim1)}, q_2^{(0\sim1)}\right)\ddot{q}_2 + D\left(q_1^{(0\sim1)}, q_2^{(0\sim1)}\right)\dot{q}_2 - k\left(q_1 - q_2\right) = u \end{cases}$$

$$q_2 = h(q_1^{(0\sim2)})$$

$$\begin{cases} \dot{q}_2 = h(q_1^{(0\sim3)}) \\ \ddot{q}_2 = h(q_1^{(0\sim4)}) \end{cases}$$

$$\boxed{c_4\left(q_1^{(0\sim3)}\right)q_1^{(4)} + c_3\left(q_1^{(0\sim3)}\right)q_1^{(3)} + c_2\left(q_1^{(0\sim3)}\right)\ddot{q}_1 + c_1\left(q_1^{(0\sim3)}\right)\dot{q}_1 + c_1\left(q_1^{(0\sim3)}\right)q_1 = u}$$

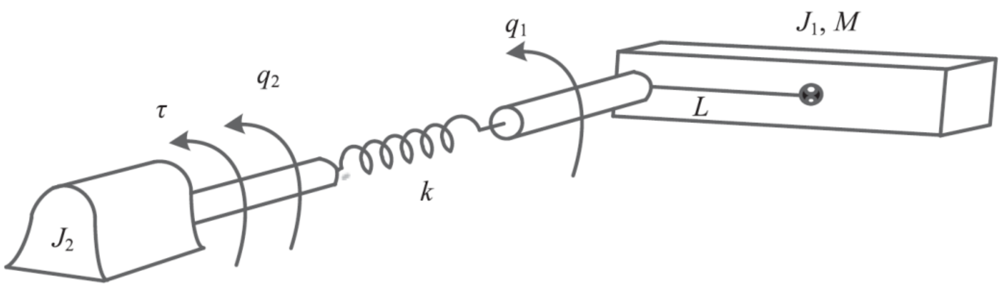
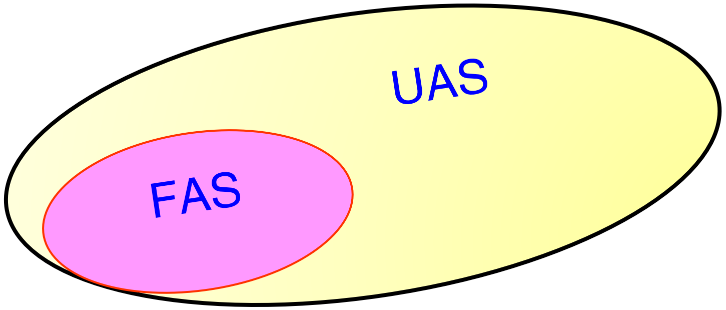
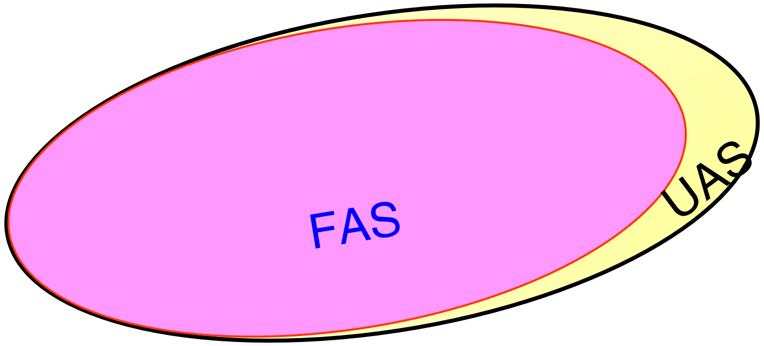


Figure 1. A robot system with elastic joints.

全驱系统知多少?



Before generalization



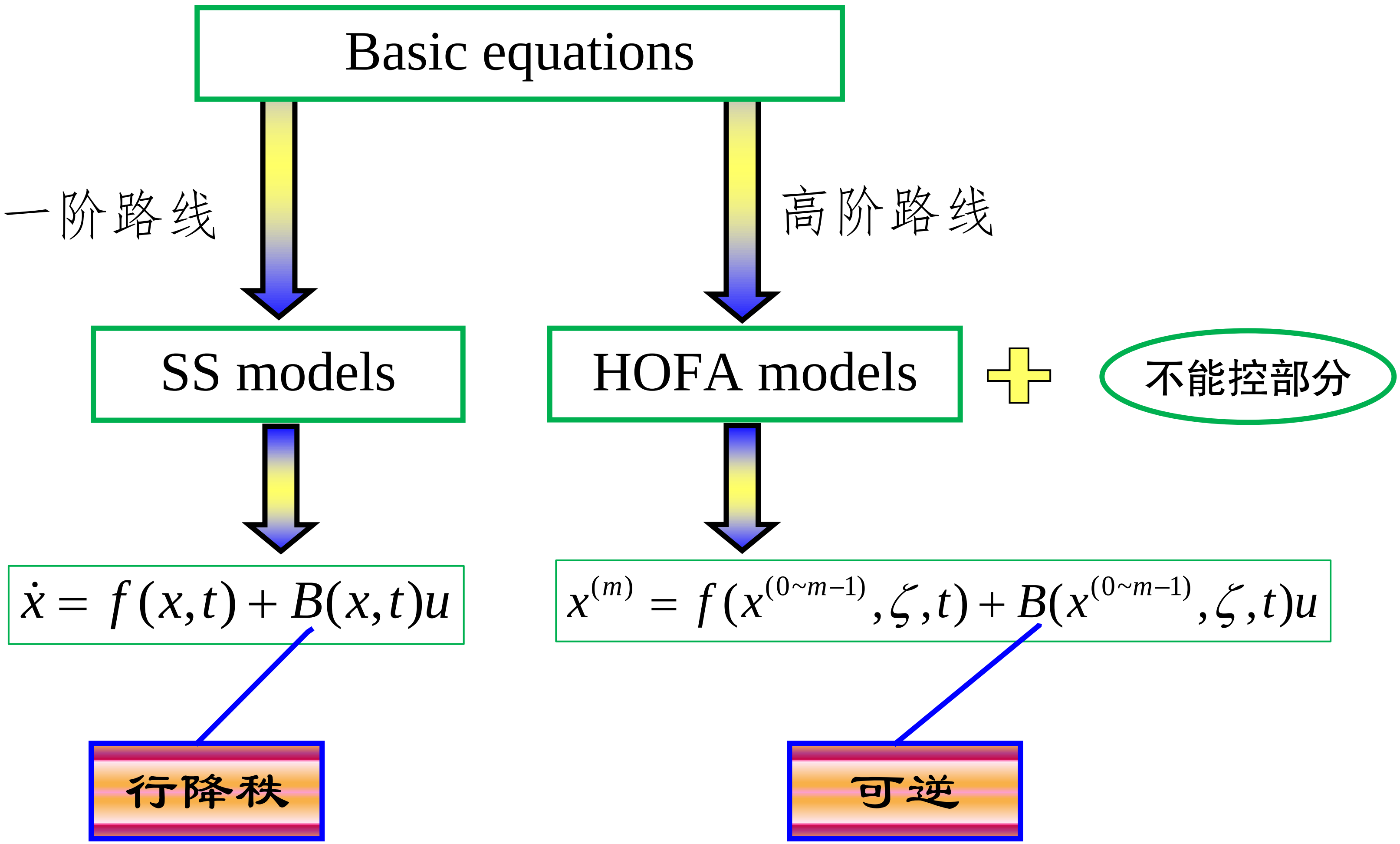
After generalization

Nonlinear systems may be very complicated, we would always have some UASs which are unable to be converted into FASs

In this world, no one dares to say that he or she can handle all nonlinear control problems!

汇报提纲

两种方法论（The two methodologies）



状态空间方法（SSA）

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)u$$

行降秩

$$x^{(m)} = f(x^{(0\sim m-1)},\zeta,t) + B(x^{(0\sim m-1)},\zeta,t)u$$

可逆

以状态为主（可以解出来），更适用于状态求解和估计；

控制系统设计严重依赖于$f(\cdot)$和$B(\cdot)$的复杂性，可能导致

- 求不出问题的解
- 只能获得局部稳定解
- 闭环系统为仍非线性

全驱系统方法（FASA）

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)u$$

行降秩

以状态为主（可以解出来），更适用于状态求解和估计；

控制系统设计严重依赖于$f(\cdot)$和$B(\cdot)$的复杂性，可能导致

- 求不出问题的解
- 只能获得局部稳定解
- 闭环系统为仍非线性

$$x^{(m)} = f(x^{(0\sim m-1)},\zeta,t) + B(x^{(0\sim m-1)},\zeta,t)u$$

可逆

以控制量为主（可以解出来），

$$u = -B^{-1}\left[A_{0\sim m-1}x^{(0\sim m-1)} + f - v\right]$$

控制系统设计变得极其简单；

闭环系统不再依赖于$f(\cdot)$和$B(\cdot)$的复杂性；

可以获得闭环系统的定常线性主部。

全驱系统方法（FASA）

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)u$$

行降秩

以状态为主（可以解出来），更适用于状态求解和估计；

控制系统设计严重依赖于$f(\cdot)$和$B(\cdot)$的复杂性，可能导致

- 求不出问题的解
- 只能获得局部稳定解
- 闭环系统为仍非线性

$$x^{(m)} = f(x^{(0\sim m-1)},\zeta,t) + B(x^{(0\sim m-1)},\zeta,t)u$$

可逆

以控制量为主（可以解出来），

$$u = -B^{-1}\left[A_{0\sim m-1}x^{(0\sim m-1)} + f - v\right]$$

控制系统设计变得极其简单；

闭环系统不再依赖于$f(\cdot)$和$B(\cdot)$的复杂性；

This implies the first point

Powerfulness of FAS approach

1. 让更多的系统拥有了全局稳定性

Allow more systems possess global stability!

Not only this,

系列报告之一

状态空间方法vs全驱系统方法（I）

——从全局镇定问题看两种方法论

Powerfulness of FAS approach

1. 让更多的系统拥有了全局稳定性
2. 让非线性系统有了合理的能控性
3. 让Lyapunov稳定性和镇定拓广到亚稳定性和亚镇定
4. 让闭环系统的响应分析和稳定性分析变得容易
5. 让一些传统难题，如Morgan问题，得以轻松解决
6. 让很多时变系统的控制不再成为问题
7. 让很多时滞系统的控制不再成为问题
8. 让线性系统有了真正的用武之地

Saying less to let yourself understood rather than saying more to let your audience puzzled

Powerfulness of FAS approach

1. 让更多的系统拥有了全局稳定性
2. 让非线性系统有了合理的能控性
3. 让Lyapunov稳定性和镇定拓广到亚稳定性和亚镇定
4. 让闭环系统的响应分析和稳定性分析变得容易
5. 让一些传统难题，如Morgan问题，得以轻松解决
6. 让很多时变系统的控制不再成为问题 √
7. 让很多时滞系统的控制不再成为问题
8. 让线性系统有了真正的用武之地 √

Powerfulness of FAS approach

1. 让更多的系统拥有了全局稳定性
2. 让非线性系统有了合理的能控性
3. 让Lyapunov稳定性和镇定拓广到亚稳定性和亚镇定
4. 让闭环系统的响应分析和稳定性分析变得容易
5. 让一些传统难题，如Morgan问题，得以轻松解决
6. 让很多时变系统的控制不再成为问题 √
7. 让很多时滞系统的控制不再成为问题
8. 让线性系统有了真正的用武之地 √

– 6. Let the control of many time-varying systems remain no longer a problem

线性时变系统的稳定性（Stability）

	$\dot{x}(t) = Ax(t)$	$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$
稳定性	充要条件： A的特征值具有负实部	$A(t) = \begin{bmatrix} 1-4\cos^2(2t) & 2+2\sin(4t) \\ -2+2\sin(4t) & 1-4\sin^2(2t) \end{bmatrix}$ $\lambda(A(t)) = \{-1,-1\}$ 负实部但不稳定
		$A(t) = \begin{bmatrix} -2+4\cos(t) & \cos(t) \\ \sin(t) & -2+4\cos(t) \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}\,\lambda_1 + \mathrm{Re}\,\lambda_2 = -4+8\cos(t)$ 正实部却稳定
		$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2}+\frac{15}{2}\sin(12t) & \frac{15}{2}\cos(12t) \\ \frac{15}{2}\cos(12t) & -\frac{11}{2}-\frac{15}{2}\sin(12t) \end{bmatrix}$ $\lambda(A(t)) = \{2,-13\}$

线性时变系统的稳定性（Stability）

R. E. Kalman

- 现代控制理论创始人
- Kalman滤波发现者
- 美国国家科学奖章
- 美国科学院院士
- 美国工程院院士
- IEEE荣誉奖章

R. E. KALMAN
Research Institute for Advanced Study,[2] Baltimore, Md.

J. E. BERTRAM
IBM Research Center, Yorktown Heights, N. Y.

Control System Analysis and Design Via the "Second Method" of Lyapunov[1]

I Continuous-Time Systems

The "second method" of Lyapunov is the most general approach currently in the theory of stability of dynamic systems. After a rigorous exposition of the fundamental concepts of this theory, applications are made to (a) stability of linear stationary, linear nonstationary, and nonlinear systems; (b) estimation of transient behavior; (c) control-system optimization; (d) design of relay servos. The discussion is essentially self-contained, with emphasis on the thorough development of the principal ideas and mathematical tools. Only systems governed by differential equations are treated here. Systems governed by difference equations are the subject of a companion paper.

7.2 Stability of Linear Nonstationary Systems. No procedure similar to Corollary 3.1 is available so far which would permit determination of the stability of general linear nonstationary systems in an algebraic way. There is little hope that this state of affairs will change soon. It is therefore necessary to use ingenuity in

1960年

[线性]时变系统不存在类似于定常系统那样的判断稳定性的方法。
此事短时间无望解决

1960年的预言，至今未破
Person died, prediction lives

线性时变系统的稳定性（Stability）

控制理论领域53个公开问题第一位

E. D. Sontag

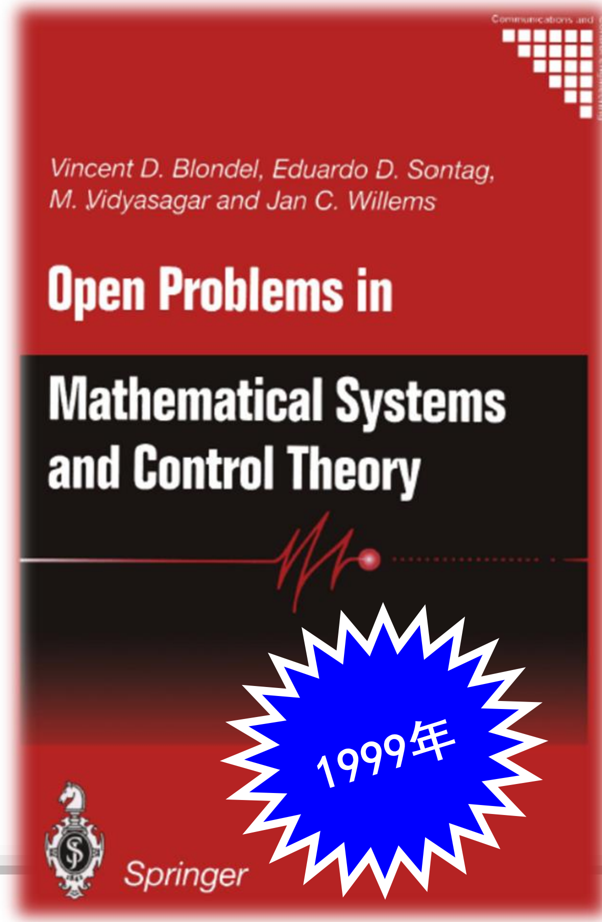
- 输入-状态稳定性提出者
- IEEE控制系统奖得主
- IEEE Fellow/SIAM Fellow

J. C. Willems

- 耗散系统理论提出者
- IEEE控制系统奖得主
- IEEE Fellow/IFAC Fellow

V. Vidyasagar

- 英国皇家学会Fellow
- IEEE控制系统奖得主
- IEEE Fellow/IFAC Fellow



Contents

非线性时变系统（Nonlinear time-varying systems）

- 线性时变系统尚且如此之难，何况非线性时变系统乎？
  其稳定性分析的难度已经是不敢想象！

Even the linear case is so difficult, not to mention the difficulties of the nonlinear case

非线性时变系统（Nonlinear time-varying systems）

- 线性时变系统尚且如此之难，何况非线性时变系统乎？其稳定性分析的难度已经是不敢想象！

- 典型著作中研究的系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

非线性时变系统 (Nonlinear time-varying systems)

- 线性时变系统尚且如此之难，何况非线性时变系统乎？其稳定性分析的难度已经是不敢想象！

- 典型著作中研究的系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

- 如果换成

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u$$

后果难以想象

- 还有多少理论方法可以保持成立？
- 同胚变换会变得极其复杂，微分几何方法面临致命的挑战！

Why stability analysis?

- Design requires
- More accurately, it is that the SSA requires
- What if we do not use SSA?
- Is there a different approach which is not dependent on the stability results of nonlinear systems?

能够摆脱这一魔咒吗？有机可投、有巧可取吗？

To realize this, we need to get rid of the bound of SSA!

——冲出状态空间方法框架的束缚！

让很多时变系统的控制不再成为问题

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)u$$

$$x^{(m)} = f(x^{(0\sim m-1)},t) + B(x^{(0\sim m-1)},t)u$$

行降秩

可逆

许多现有理论失效!

严重依赖于$f(\cdot)$和$B(\cdot)$的复杂性;

严重依赖于时变关系的复杂性。

雪上加霜

让很多时变系统的控制不再成为问题

$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u$

行降秩

$x^{(m)} = f(x^{(0\sim m-1)}, t) + B(x^{(0\sim m-1)}, t)u$

可逆

许多现有理论失效！

严重依赖于$f(\cdot)$和$B(\cdot)$的复杂性；

严重依赖于时变关系的复杂性。

雪上加霜

控制律

$$u = -B^{-1}(f + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} - v)$$

闭环系统

$$x^{(n)} + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} = v$$

闭环系统不再依赖于$f(\cdot)$和$B(\cdot)$的复杂性；

可以获得闭环系统的定常线性（主部）。

无关痛痒

Powerfulness of FAS approach

1. 让更多的系统拥有了全局稳定性
2. 让非线性系统有了合理的能控性
3. 让Lyapunov稳定性和镇定拓广到亚稳定性和亚镇定
4. 让闭环系统的响应分析和稳定性分析变得容易
5. 让一些传统难题，如Morgan问题，得以轻松解决
6. 让很多时变系统的控制不再成为问题 √
7. 让很多时滞系统的控制不再成为问题
8. 让线性系统有了真正的用武之地 √

– 8. Let the linear system control theories be thoroughly utilized

线性与非线性

- A pure linear system does not exist!
- It is an approximation to a nonlinear one
- Linear problems are easy and solvable

Martin Luther King
“I have a dream”

线性与非线性

- A pure linear system does not exist！
- It is an approximation to a nonlinear one
- Linear problems are easy and solvable

Martin Luther King
“I have a dream”

- We have a dream：
  - 把非线性问题转化为线性问题来解决
  - ——整个科学界的梦想！
  - *“We have a dream that one day all nonlinear problems are converted into linear ones and therefore can be all completely solved!”*

FASA makes our dream partially come true!

让线性系统理论真正有了用武之地

基本问题

1. 镇定（Stabilization）

让线性系统理论真正有了用武之地

基本问题

1. 镇定（Stabilization）

确定性系统问题

2. 渐近跟踪 （Asymptotical tracking）
3. 最优控制 （Optimal control）
4. 观测器设计（Observer design）

让线性系统理论真正有了用武之地

基本问题

1. 镇定（Stabilization）

确定性系统问题

2. 渐近跟踪 （Asymptotical tracking）
3. 最优控制 （Optimal control）
4. 观测器设计（Observer design）

不确定性系统问题

5. 抗干扰 （Disturbance rejection）
6. 鲁棒控制 （Robust control）
7. 自适应控制（Adaptive control）

让线性系统理论真正有了用武之地

基本问题

1. 镇定（Stabilization）

确定性系统问题

2. 渐近跟踪 （Asymptotical tracking）
3. 最优控制 （Optimal control）
4. 观测器设计（Observer design）

不确定性系统问题

7. 自适应控制（Adaptive control）

All these nonlinear control problems are converted into linear ones!

For example,

Asymptotical tracking

非线性问题

$$\begin{cases} x^{(n)} = f\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right) + B\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right)u \\ y = Cx^{(0\sim n-1)} \\ \lim_{t\to\infty}\left(y(t) - r(t)\right) = 0 \end{cases}$$

控制输入变换

$$u = -B^{-1}(f + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} - v)$$

线性问题

$$\begin{cases} x^{(n)} + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} = v \\ y = Cx^{(0\sim n-1)} \\ \lim_{t\to\infty}\left(y(t) - r(t)\right) = 0 \end{cases}$$

状态空间方法下的相应问题难度很大，多为特殊性的局部结果

可以跟踪定常、时变信号

可以跟踪模型参考信号

状态反馈控制律
PID控制律

Duan G. R., IJSS, Part IX. Generalized PID control and model reference tracking.

Robust control

非线性问题

$$x^{(n)} = f\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right) + \Delta f\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right) + B\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right)u$$

控制输入变换

$$u = -B^{-1}(f + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} - v)$$

线性问题

$$x^{(n)} + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} - \Delta f\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right) = v$$

状态空间表示

$$\dot{x}^{(0\sim n-1)} = \Phi(A_{0\sim n-1})x^{(0\sim n-1)} + B_c\Delta f\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right) + B_c v$$

状态空间方法下的相应问题难度很大，多为特殊性结果，一般只能获得局部稳定结果

针对不确定性的两种假设可以实现两种目标：

1. 全局最终有界性
2. 全局渐近稳定性

Duan G. R., IJSS, Part III. Robust control and high-order backstepping, 2021, 52(5), 952-971 - DOI:10.1080/00207721.2020.1849863

Adaptive control

非线性问题

$$x^{(n)} = f\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right) + H^{\mathrm{T}}\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right)\theta + B\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right)u$$

控制输入变换

$$u = -B^{-1}(f + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} - v)$$

线性问题

$$x^{(n)} + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} + H^{\mathrm{T}}\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right)\theta = v$$

状态空间表示

$$\dot{x}^{(0\sim n-1)} = \Phi(A_{0\sim n-1})x^{(0\sim n-1)} + B_c H^{\mathrm{T}}\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right)\theta + B_c v$$

状态空间方法下的相应问题难度很大，多为特殊性结果，一般只能获得局部稳定结果

针对未知参数为定常和时变两种情形分别实现了两种目标：
1. 全局最终有界性
2. 全局渐近稳定性

Duan G. R., IJSS, Part IV. Adaptive control and high-order backstepping, 2021, 52(5), 972-989. - DOI:10.1080/00207721.2020.1849864

Disturbance rejection

非线性问题

$$x^{(n)} = f\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right) + B\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right)u + Ed$$

控制输入变换

$$u = -B^{-1}(f + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} - v)$$

线性问题

$$x^{(n)} + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} = v + Ed$$

状态空间表示

$$\dot{x}^{(0\sim n-1)} = \Phi(A_{0\sim n-1})x^{(0\sim n-1)} + B_c v + B_c Ed$$

状态空间方法下的相应问题难度很大，多为特殊性的结果

解耦、抑制、补偿

干扰可以是由模型生成的

随机干扰的情形——随机系统的一片新天地

段广仁. 高阶系统方法—I. 全驱特性与参数化设计. 自动化学报, 2020, 41(7): 1333–1345

Duan G. R., IJSS, Part VI. Disturbance attenuation and decoupling. - DOI:10.1080/00207721.2021.1879966

Observer-based output feedback control

非线性问题

$$\begin{cases} x^{(n)} = f\left(x^{(0\sim n-1)}, t\right) + B(y,t)u \\ y = Cx^{(0\sim n-1)} \end{cases}$$

控制输入变换

$$u = -B^{-1}(f + A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)} - v)$$

线性问题

$$\begin{cases} \dot{x}^{(0\sim n-1)} = \Phi(A_{0\sim n-1})x^{(0\sim n-1)} + B_c v \\ y = Cx^{(0\sim n-1)} \end{cases}$$

动态补偿器

$$\begin{cases} u = -B^{-1}(f + A_{0\sim n-1}\hat{x}^{(0\sim n-1)} - v) \\ \dot{\hat{x}}^{(0\sim n-1)} = \Phi(A_{0\sim n-1})\hat{x}^{(0\sim n-1)} \\ \qquad\qquad + B_c v - L(y - C\hat{x}^{(0\sim n-1)}) \end{cases}$$

输出反馈控制的一种实现是基于状态观测，状态空间方法下非线性系统的状态观测器设计问题和镇定问题一样难

全驱系统特性为我们提供了基于转化后的线性系统设计观测器的可能性

在Lipschitz条件下实现了系统的全局镇定

and ……, more!

- This is the right model for control—FA model
- This is the right approach for control—FA approach
- This is the approach which makes part of our dream come true!

Besides,

与线性系统理论的完美结合

- *This is a perfect combination of FAS theories and linear systems theories!*
- 状态空间方法的线性系统理论部分是很成熟、很完备的！
- 全驱系统方法将复杂的非线性控制问题转化为线性问题，为基于状态空间方法的线性系统理论赋予了新的生命！让线性系统理论真正有了用武之地！

汇报提纲

I. Introduction

II. Fully actuated system approaches

III. Modelling

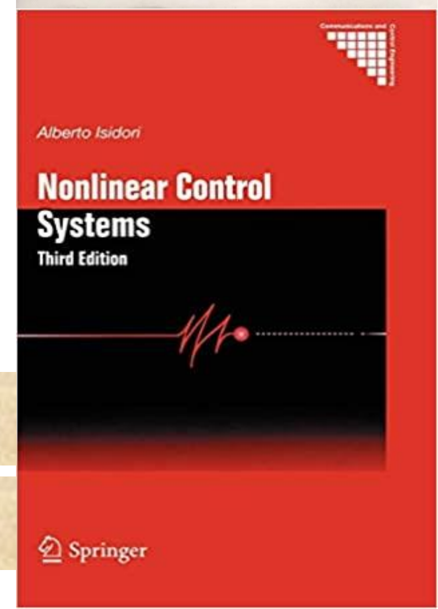
IV. Powerfulness

V. Difference from feedback linearization

VI. Concluding remarks

What is feedback linearization?

- We check with two books of authority in the field of nonlinear control
- One in Chinese
- One in English



程代展编著，非线性系统的几何理论，科学出版社，1988

Isidori A., Nonlinear Control Systems I, 3rd ed., Springer Verlag., 1995.

Definition in Cheng (1988)

加了．下面给出状态反馈线性化的定义．

定义 6.6 系统(6.1)在 x_0 点状态反馈线性化问题指的是：存在 x_0 点一个邻域 U，反馈控制 $u=\alpha(x)+\beta(x)v$，这里 $\alpha(x)\in C^\infty_m(U)$，$\beta(x)\in Gl(m, C^\infty(U))$，和 U 到 $\mathbf{R}^n$ 开集的一个微分同坯 T，使得反馈系统

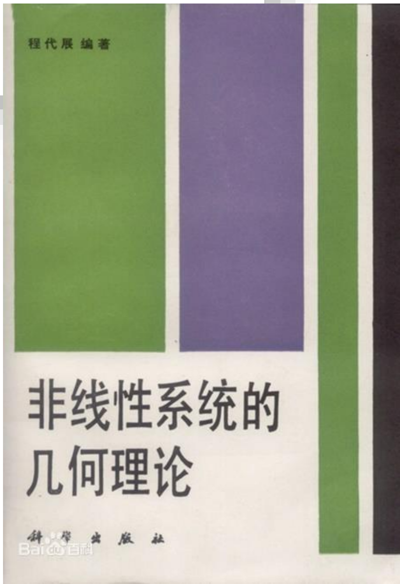
$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)$$

在 T 所决定的局部坐标下变为一个完全能控的线性系统

$$\dot{z} = Az + Bv$$

p.238

程代展编著，非线性系统的几何理论，科学出版社，1988



Definition in Cheng (1988)

加了. 下面给出状态反馈线性化的定义.

定义 6.6 系统(6.1)在 x_0 点状态反馈线性化问题指的是:存在 x_0 点一个邻域 U, 反馈控制 $u=\alpha(x)+\beta(x)v$, 这里 $\alpha(x)\in C_m^\infty(U)$, $\beta(x)\in Gl(m, C^\infty(U))$, 和 U 到 $\mathbf{R}^n$ 开集的一个微分同坏 T, 使得反馈系统

$$\dot{x}=f(x)+g(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x)$$

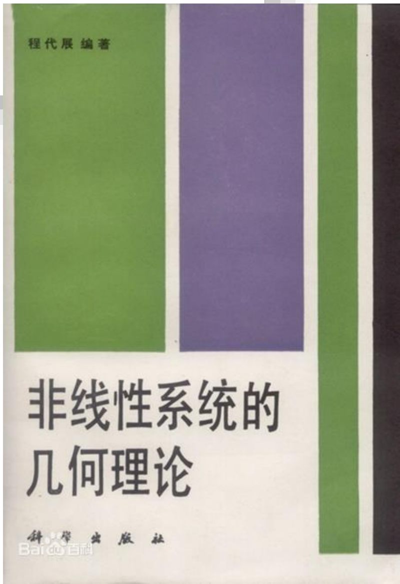
在 T 所决定的局部坐标下变为一个完全能控的线性系统

$$\dot{z}=Az+Bv$$

要求反馈控制律的光滑性

p.238

程代展编著，非线性系统的几何理论，科学出版社，1988



Definition in Isidori (1995)

State-Space Exact Linearization Problem. Given a set of vector fields $f(x)$ and $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ and an initial state x°, find (if possible), a neighborhood U of x°, a pair of feedback functions $\alpha(x)$ and $\beta(x)$ defined on U, a coordinates transformation $z = \Phi(x)$ also defined on U, a matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and a matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, such that

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(f(x) + g(x)\alpha(x))\right]_{x=\Phi^{-1}(z)} = Az \tag{5.17}$$

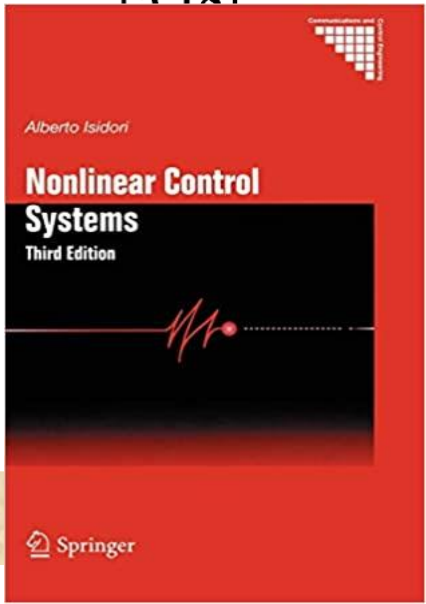
$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(g(x)\beta(x))\right]_{x=\Phi^{-1}(z)} = B \tag{5.18}$$

and

$$\text{rank}\,(B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B) = n\,.$$

p.238-229

Isidori A., Nonlinear Control Systems I, 3rd ed., Springer Verlag., 1995.



Definition in Isidori (1995)

State-Space Exact Linearization Problem. Given a set of vector fields $f(x)$ and $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ and an initial state x°, find (if possible), a neighborhood U of x°, a pair of feedback functions $\alpha(x)$ and $\beta(x)$ defined on U, a coordinates transformation $z = \Phi(x)$ also defined on U, a matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and a matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, such that

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(f(x) + g(x)\alpha(x))\right]_{x=\Phi^{-1}(z)} = Az \qquad (5.17)$$

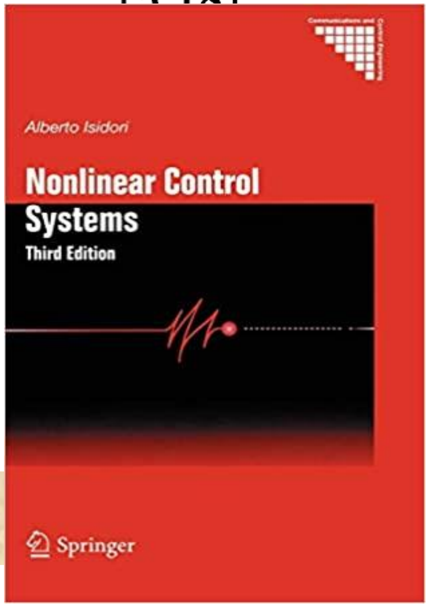
$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(g(x)\beta(x))\right]_{x=\Phi^{-1}(z)} = B \qquad (5.18)$$

and

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n\,.$$

要求反馈控制律的光滑性

p.238-229



Isidori A., Nonlinear Control Systems I, 3rd ed., Springer Verlag., 1995.

Differences observed from the definitions

Requirement	FL	FASA
Tackles only SS models	yes	not necessarily
Tackles only constant systems	yes	not necessarily
Tackles only deterministic systems	yes	not necessarily
Smooth controller	yes	not necessarily
Derive a linear system	yes	not necessarily
Object system is controllable	yes	not necessarily

主要差别（Main differences）

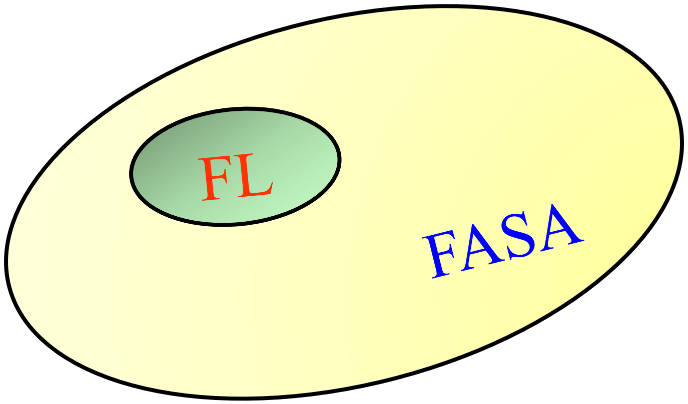
1. 研究对象范围不同
2. 不是一个层面上的问题
3. 出发点不同
4. 要求不同
5. 目的不同
6. 扩展面不同
7. 可操作性不同
8. 全驱系统方法既可解反馈线性化方法之所能

   全驱系统方法又可解反馈线性化方法所不能

Saying less to let yourself understood rather than saying more to let your audience puzzled

主要差别（Main differences）

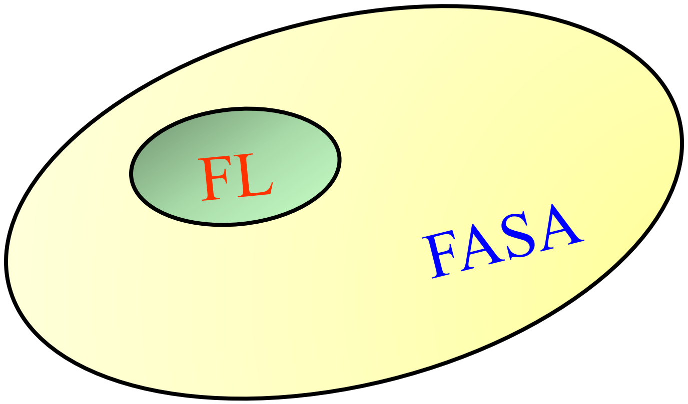
1. 研究对象范围不同
2. 不是一个层面上的问题
3. 出发点不同
4. 要求不同
5. 目的不同
6. 扩展面不同
7. 可操作性不同
8. 全驱系统方法既可解反馈线性化方法之所能
   全驱系统方法又可解反馈线性化方法所不能



It solves the problems that feedback linearization does, and also those that feedback linearization does not!

主要差别（Main differences）

1. 研究对象范围不同
2. 不是一个层面上的问题
3. 出发点不同
4. 要求不同
5. 目的不同
6. 扩展面不同
7. 可操作性不同
8. 全驱系统方法既可解反馈线性化方法之所能
   全驱系统方法又可解反馈线性化方法所不能

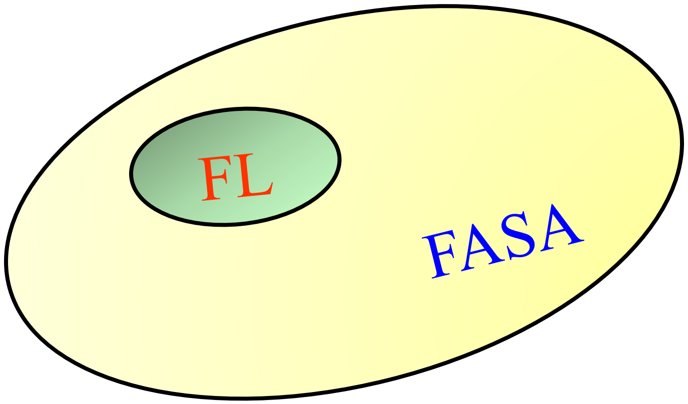


已经在理论上严格证明所有可反馈线性化的系统都能够等价地化成高阶全驱系统！

自动化学报 2020 41(7):1333-1345　　Int. J. Sys. Sci. 2021, Part X

主要差别（Main differences）

1. 研究对象范围不同
2. 不是一个层面上的问题
3. 出发点不同
4. 要求不同
5. 目的不同
6. 扩展面不同
7. 可操作性不同
8. 全驱系统方法既可解反馈线性化方法之所能
   全驱系统方法又可解反馈线性化方法所不能



已经在理论上严格证明所有可反馈线性化的系统都能够等价地化成高阶全驱系统！

自动化学报 2020 41(7):1333-1345

有例为证！

Example 3- 不可反馈线性化 (Brockett, 1983)

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = xy \end{cases}$$

A famous example!

- Not feedback linearizable!

Brockett, R. W. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization. Differential Geometric Control Theory, Birkhauser, Boston, 112-121.

The FA models

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = xy \end{cases}$$

x和y的对称性

Model 1： $$\boxed{\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{z}}{x} & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}} \quad \text{if } x \neq 0$$

Model 2： $$\boxed{\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & \frac{\dot{z}}{y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}} \quad \text{if } y \neq 0$$

Brocket, R. W. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization. Differential Geometric Control Theory, Birkhauser, Boston, 112-121.

The controller

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = xy \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{cases} -\begin{bmatrix} \frac{\dot{z}}{x} & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 z + a_1 \dot{z} \\ \beta x \end{bmatrix} & \text{if } x(0) \neq 0 \\ -\begin{bmatrix} y & \frac{\dot{z}}{y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 z + a_1 \dot{z} \\ \beta y \end{bmatrix} & \text{if } y(0) \neq 0 \end{cases}}$$

Closed-loop system:

$$\begin{cases} \ddot{z} + a_1 \dot{z} + a_0 z = 0 \\ \dot{x} + \beta x = 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \ddot{z} + a_1 \dot{z} + a_0 z = 0 \\ \dot{y} + \beta y = 0 \end{cases}$$

The conclusion

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = xy \end{cases}$$

Proposition. The controller realizes

$$x, y, z \to 0, \quad u, v \to 0$$

if

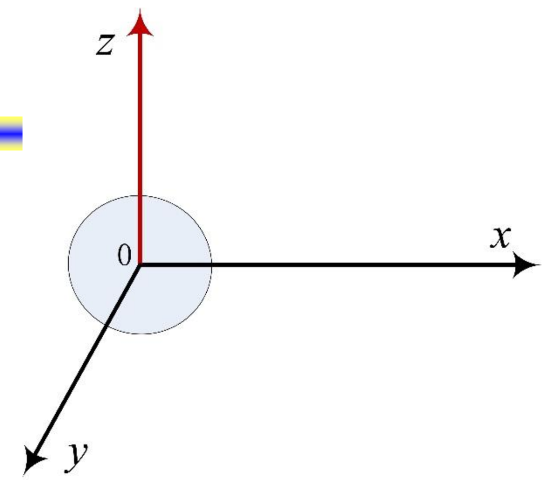
$$x^2(0) + y^2(0) > 0$$

that is, $x(0)$ and $y(0)$ are not simultaneously zero.

How good is this result? It is nothing!

Further comments

- It is not global asymptotical stability
- It is even not local asymptotical stability because of the initial value restriction
- and this is why the system is not feedback linearizable!

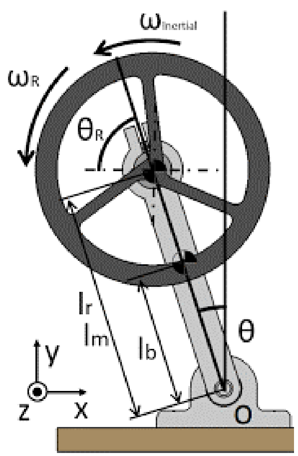


Initial value space

- 其实除了 z 坐标轴以外的一切点都收敛到原点，吸引域几乎就是整个空间，非吸引域仅仅是一条直线——almost global stability
- 而Lyapunov局部稳定性的吸引域仅为一个球域，非吸引域却是挖去该球域的整个空间。

——Which is better?

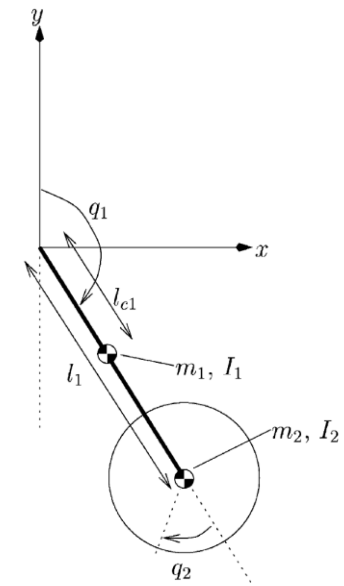
Example 4 - Reaction-wheel pendulum



$$\begin{cases} J_1\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 = -\alpha \sin q_1 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = u_1, \end{cases}$$

$$\alpha = (m_1 l_2 + m_2 l_1)\, g, \quad u_1 = \frac{1}{J_2}\tau$$

$$\Delta J = J_1 - J_2, \quad \eta = \frac{J_2}{J_1}$$

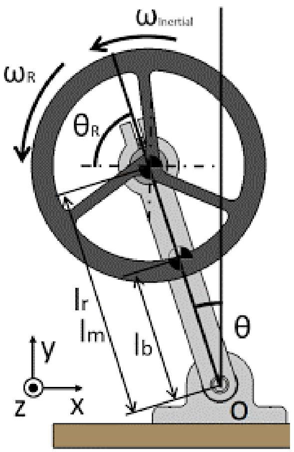


- Spong et al (2001) 考虑了降阶模型，获得了反馈线性化控制律
- Fantoni & Lozano (2001) 获得了原模型的反馈线性化控制律
- 但二者的反馈线性化均是局部的，均附加了限制条件 $-\pi < q_1 < \pi$

Mark W. Spong, et al., Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum, *Automatica* 37 (2001) 1845-1851

Isabelle Fantoni & Rogelio Lozano., *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*, Springer, 2001, Londen

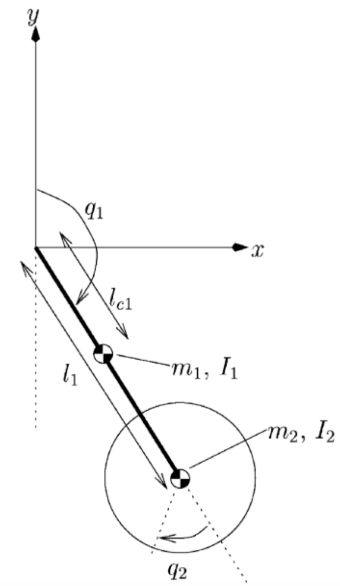
Local feedback linearization



$$\begin{cases} J_1\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 = -\alpha \sin q_1 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = u_1, \end{cases}$$

$$\alpha = (m_1 l_2 + m_2 l_1)\, g, \quad u_1 = \frac{1}{J_2}\tau$$

$$\Delta J = J_1 - J_2, \quad \eta = \frac{J_2}{J_1}$$



Spong 还指出

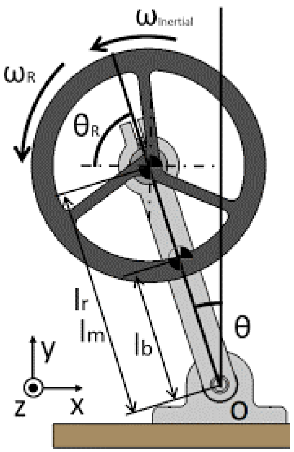
$-\pi < q_1 < \pi$

是最大的可能实现反馈线性化的区域

We leave it to the reader to verify that the region $|x_1| < \pi/2$ is the largest possible region in which the system can be feedback linearizable and that the full fourth order system, including the disk angular position, is also locally feedback linearizable in the above fashion using the output equation

$$y = d_{11}q_1 + d_{12}q_2.$$

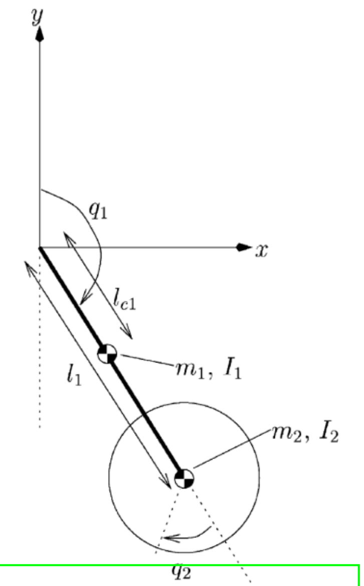
What can the FAS approach do?



$$\begin{cases} J_1\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 = -\alpha\sin q_1 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = u_1, \end{cases}$$

$$\alpha = (m_1 l_2 + m_2 l_1)\, g, \quad u_1 = \frac{1}{J_2}\tau$$

$$\Delta J = J_1 - J_2, \quad \eta = \frac{J_2}{J_1}$$



我们基于全驱系统方法获得了该系统的全局反馈线性化控制律，去除了限制条件 $-\frac{\pi}{2} < q_1 < \frac{\pi}{2}$

实现了在 $q_1 \neq \pm\frac{\pi}{2}$ 情况下的全方位任何位置的平衡悬停

这种推广是重要的：

- 应用上简化了设计
- 理论上是对已有结果的一种突破，显示了全驱系统方法的优势。

汇报提纲

I. Introduction

II. Fully actuated system approaches

III. Modelling

IV. Powerfulness

V. Difference from feedback linearization

VI. Concluding remarks

FAS—Model for control

- “全驱”概念原本是物理的，全驱系统被认定是一个很小的集合，不值得研究
- 人们忽略了这一概念在数学上的推广，看不到全驱和欠驱可以相互转化

新概念下的高阶全驱系统是

一般的面向控制的模型！

Model for Control

以此模型为基础研究系统分析和设计的方法即为高阶全驱系统方法

FASA—Approach for control

- It is a general approach for control, which can handle
  - Continuous-time systems
  - Discrete-time systems
  - Time-delay systems
  - Stochastic systems
  - ……
- FASA is only two-years old by now.
- it solves many problems in a better way, while in the meantime it also leaves many problems unsolved to us at the present for further investigation.

SSA and FASA

- 状态空间模型是一粒种子
- 状态空间方法是从该粒种子长出来的一棵大树

一阶状态空间方法

SSA and FASA

- 状态空间模型是一粒种子
- 状态空间方法是从该粒种子长出来的一棵大树

一阶状态空间方法

- 全驱系统模型也是一粒种子
- 全驱系统方法是刚从该粒种子长出来的一棵小树
- It needs our watering and care!

高阶全驱系统方法

全驱系统研讨班（A long term seminar）

City	No. of persons	Persons in charge
北京	52	胡庆雷
上海	40	杨　博
深圳	33	吴爱国
南京	56	张　柯
秦皇岛	89	华长春
郑州	39	徐明亮
沈阳	36	李霄剑
哈尔滨	153	侯明哲

Activities: 每年2~3次大型研讨会，若干次小型研讨会
报告尽量采用线上和线下同时进行
通过腾讯网盘交换相关资料

Extending my invitation:

You are welcome to join !

北京全驱系统方法研讨班

上海全驱系统方法研讨班

深圳全驱系统方法研讨班

南京全驱系统方法研讨班

秦皇岛全驱系统方法研讨班

沈阳全驱系统方法研讨班

哈尔滨全驱系统方法研讨班

谢　谢!

敬请批评指正!

Thank you for your attention！

常用记号

引入记号

$$\Phi(A_{0\sim n-1})=\begin{bmatrix}0 & I & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{n-1}\end{bmatrix},\ B_c=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ I\end{bmatrix}$$

$$\Phi(0_{0\sim n-1})=\begin{bmatrix}0 & I & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\text{---幂零矩阵}$$

线性系统

$$x^{(n)}+A_{0\sim n-1}x^{(0\sim n-1)}=v$$

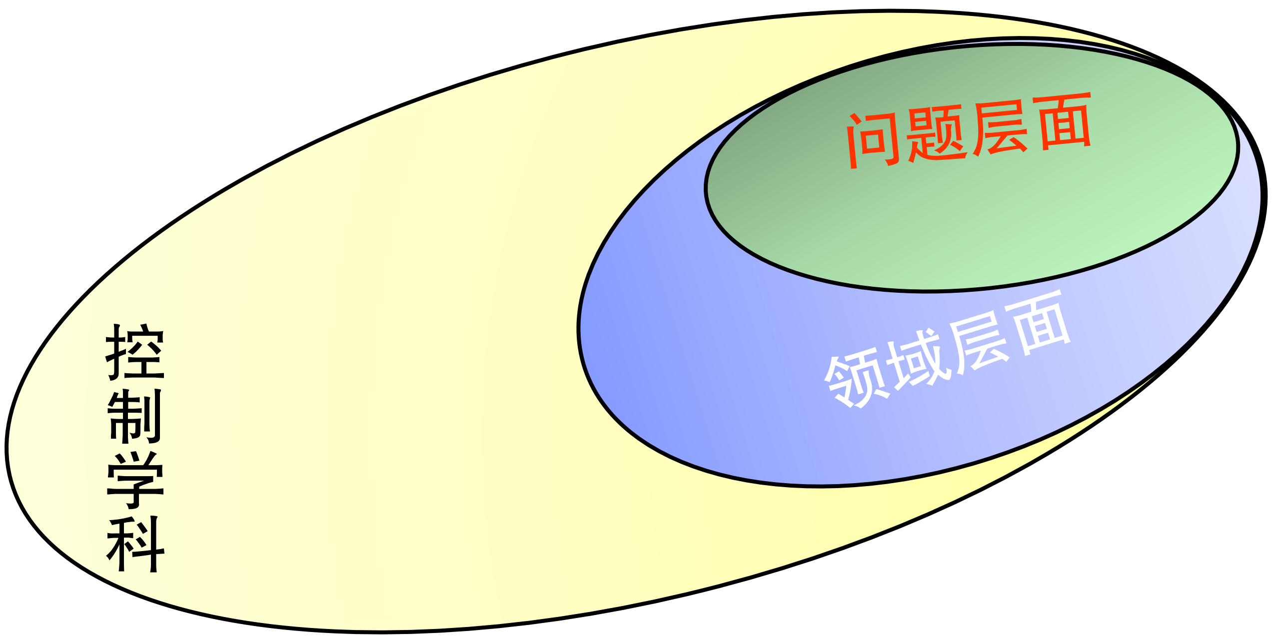
与下述状态空间模型等价

$$\dot{x}^{(0\sim n-1)}=\Phi(A_{0\sim n-1})x^{(0\sim n-1)}+B_c v$$

方法论的突破

根本性的改进！

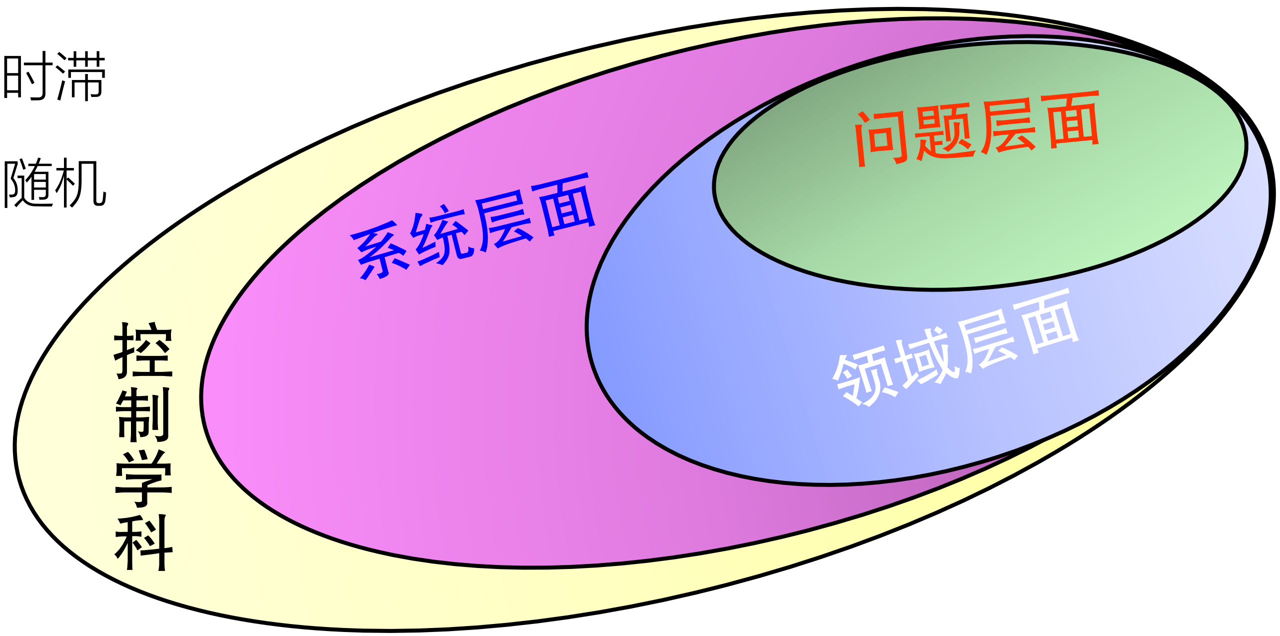
- 问题层面
- 领域层面
  - 鲁棒控制
  - 自适应控制
  - 最优控制
  - ……



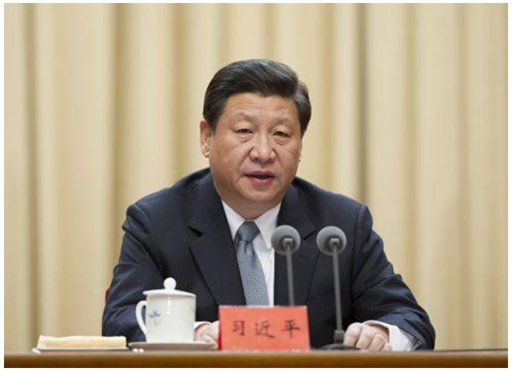
方法论的突破

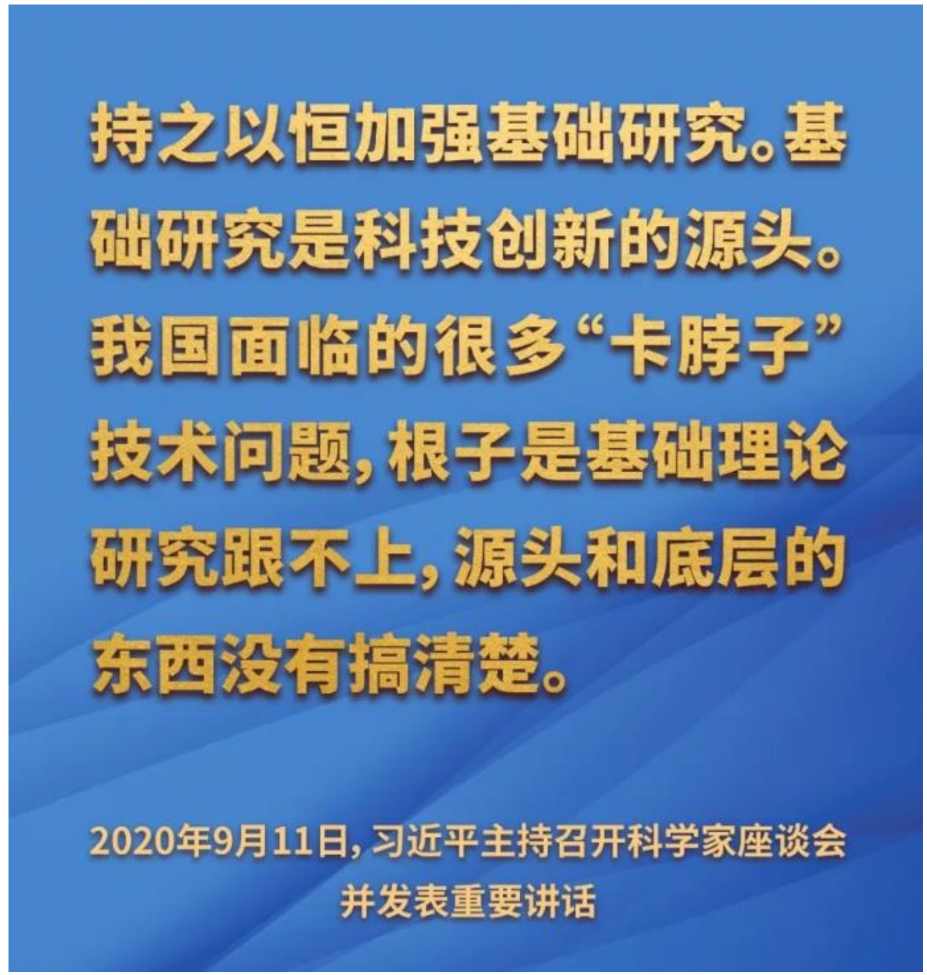
根本性的改进！

- 问题层面
- 领域层面 – 鲁棒控制、自适应控制、最优控制
- 系统层面
  – 连续、离散、时滞、随机
  – 连续时滞、离散时滞
  – 连续随机、离散随机
  – 连续时滞随机
  – 离散时滞随机
  – ……



基础理论研究


习近平


持之以恒加强基础研究。基础研究是科技创新的源头。我国面临的很多"卡脖子"技术问题，根子是基础理论研究跟不上，源头和底层的东西没有搞清楚。
2020年9月11日，习近平主持召开科学家座谈会并发表重要讲话

控制基础理论

近30年来，研究越来越少，研究结果的普适性越来越窄；人们更倾向于应用问题；状态空间方法框架下的控制理论之路越来越难走，人们纷纷选择了回避。

Control is dead！

在等待奇迹发生，

等待一个黄金时代的出现

但这种机会不会来自对现有成熟理论的拓展

——对颠覆性控制理论的强烈呼唤！

高阶全驱系统方法

- 彻底颠覆了原来的方法论
- 已经部分地解决了控制系统的全局镇定问题
- 开辟了一条崭新的路线

我的前两个国家自然科学奖
——在别人的园子里种了两棵树

当前这项研究
——在开垦一个巨大的果园

感恩这一重大发现，有生之年致力于此项研究

天降大任于斯人也

希望

希望国内控制界人士和机构能够大力支持这一原创性理论的研究，掀起控制理论界关于高阶全驱系统方法的研究高潮，引发控制理论的下一个黄金时代。

这是一块巨大的处女地！

衷心希望我国更多的年轻学者加盟到这一领域的研究中来，尽快做出一批具有原创性和颠覆性的成果。让中国成为控制理论下一个黄金时代的中心！

结果上的差别

镇定问题	状态空间方法	全驱系统方法
闭环线性系统	极其少	很多
全局指数稳定	很少	很多
全局渐近稳定	较少	较多
局部渐近稳定	很多	很少
局部稳定	较多	极其少
不会解	有	极其少

A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*

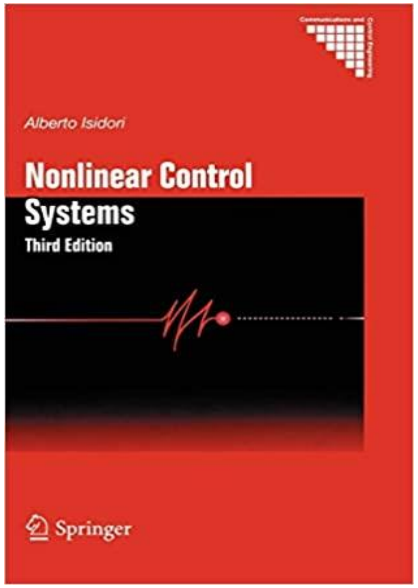
Volume I

- Isidori A., Nonlinear Control Systems: an Introduction, Springer Verlag, 1985.
- Isidori A., Nonlinear Control Systems: an Introduction, 2nd ed., Springer Verlag, 1989.
- Isidori A., Nonlinear Control Systems, 3rd ed., Springer Verlag., 1995.
- Alberto Isidori(著)，王奔， 庄圣贤(译). 非线性控制系统: 第三版. 电子工业出版社, 2005.

$$\boxed{\dot{x} = f(x,u)} \qquad \boxed{\dot{x} = f(x) + B(x)u}$$

Volume II

- Isidori A., Nonlinear Control Systems II, Springer Verlag., 1999.
- Alberto Isidori(著)，李殿璞(译). 非线性控制系统: 第三版.卷II. 电子工业出版社, 2012.



全驱系统理论工作进展

系 统 类 型	性 质	状态完全已知	状态不完全已知
确定性系统	全 驱	已解决	
	亚全驱		未解决
不确定性系统	全 驱		
	亚全驱		

确定性系统：确定性的连续时间系统、离散时间系统和时间滞后系统

不确定性系统：随机系统、带有未知参数和、或包含扰动和未建模动态的系统

大会报告——高阶全驱系统理论

- 关于状态空间方法的反思
  - YAC 2020，2020年10月16-18日，广
- 状态空间方法vs全驱系统方法
  - ICCSS 2020，2020年11月13-15日，广州
- 全驱系统方法
  - CAA青年科学家论坛，2021年4月10-12日，郑州
- Controllability and Stabilizability: Frameworks in state-space approaches and fully actuated system approaches
  - CCDC 2021, 22-24, May， Kunming
- Full actuation — from physical to mathematical
  - IEEE ICRA 2021， 2-3, June， Xian
- State-space approaches vs fully actuated system approaches
  - CCC2021, 27-30, July， Shanghai

习惯势力往往很强大

两种方法论所导致的差别是巨大的!

那么为什么状态空间方法在控制问题中一直沿用至今呢?

- 先入为主
- Following天性
- 可行性原则
- 习惯成自然
- 线性系统体系的影响
- 受制于物理概念
- 只缘身在此山中

控制系统参数化设计

1989	线性系统	
1995	高阶线性系统	发现了全驱特性的优越性
2012	高阶伪线性系统	发现了全驱和欠驱可转化
2015	高阶全驱系统方法	从而确立了这一重大发现

方法的普适性

理论上说，我们提出了高阶全驱系统方法是普适的！

但是，

- 对于可以机理建模的系统，如机电系统，它应该更有效，对于基于数据建模的系统有待深一步探究；
- 对于非常复杂的系统，其基础方程数量多且复杂，此时要获得系统的高阶全驱模型可能也会比较困难；
- 对于一些本质非线性，如饱和、死区、间隙等，如何应用尚需探讨。