

网络化动态系统特定连接的全局可辨识性

殷恺琳¹, 周彤²

1. 清华大学自动化系, 北京 100084
E-mail: yinkl17@mails.tsinghua.edu.cn

2. 清华大学自动化系, 北京 100084
E-mail: tzhou@mail.tsinghua.edu.cn

摘要: 针对线性时不变的网络化动态系统(networked dynamic systems, NDS), 本文研究了能够从外部输入输出数据唯一确定其拓扑结构的问题. 该NDS允许子系统具有不同动态, 且子系统之间可以具有任意有向连接. 在每个子系统的外部输入到内部输出之间的传递函数阵满足正规行满秩的条件下, 推导出了NDS在特定的子系统连接矩阵下全局可辨识的充分必要条件, 且通过数值实验验证了该理论判据. 仿真结果还表明, 不同结构NDS的外部输出之差与让NDS失稳的连接矩阵的区域密切相关, 而不是随着连接矩阵到不可辨识区域距离的增加而单调递增. 这些发现给后续辨识实验设计等提供了一些重要启示.

关键词: 结构可辨识性, 网络化动态系统, 正规行满秩, Smith-McMillan标准形

Global Identifiability of NDSs with Specific Connections

Yin Kailin¹, Zhou Tong²

1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China
E-mail: yinkl17@mails.tsinghua.edu.cn

2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China
E-mail: tzhou@mail.tsinghua.edu.cn

Abstract: This paper investigates structural identifiability of a linear time invariant(LTI) networked dynamic system(NDS). That is, conditions under which NDS topological structure can be solely determined from external input/output data. Subsystems in this NDS are allowed to have different dynamics and arbitrary directed connections. Under the condition that in each subsystem the transfer function matrix(TFM) from its external inputs to its internal outputs is of full normal row rank(FNRR), a necessary and sufficient condition is established for the global identifiability of an NDS with a specific subsystem connection matrix(SCM). A numerical example is provided to illustrate these theoretical criteria. Simulation results also show that rather than increases monotonically with SCM's distance to the unidentifiable area, external output differences between NDSs with distinct structures are more closely related to the areas of subsystem connections that lead to an unstable NDS. These observations are expected to be helpful in the design of identification experiments, ect.

Key Words: Structural Identifiability, NDS, Full Normal Row Rank, Smith-McMillan form

1 背景介绍

网络化动态系统(NDS)的分析和综合长期以来一直是多个学科领域的研究焦点. 随着通信和计算机技术的发展, 系统维数越来越高、规模越来越大, 而许多具有挑战性的研究课题仍亟待解决, 其中包括从测试数据中辨识NDS的结构、对NDS的可控性/可观测性建立计算上可行的验证条件等[1],[3],[4],[5]. 在外部信号或干扰的激励下, NDS的行为或性能不仅依赖于每个子系统的动态, 还很大程度上受制于子系统之间的相互作用. 很多情况下该相互作用是未知的, 例如在电力系统中, 输电线路可能会因为自然或人为因素而短路或断路; 在基于无线通信的NDS中, 由于不可预知的通信拥堵, 一些交互连接可能会失效; 在基因调控网络中, 测量基因之间的直接作用通常很难做到或代价极大, 等等. 这些情形下, 通常只能利用实验数据来估计子系统之间的相互作用. 因此, 研究NDS的结构可辨识性具有重要意义[2],[4],[6].

对NDS的动态描述大致分为两类. 一类是将每个观测变量作为节点, 将变量之间的传递函数作为节点之间的相互作用. 这种描述在许多NDS分析和综合的研究中被采用, 包括[8],[9],[10]等. 另一类是将每个子系统视为节点, 将子系统之间的连接系数作为节点之间的相互作用. 这种方法也被广泛应用, 例如[2],[4],[11]及其参考文献. 无论用哪种方法描述NDS的动态特性, 要根据实验数据估计子系统之间的相互作用, 首先应判定其是否可辨识. 特别地, 最近一些研究都明确指出, NDS子系统之间的相互作用并不总能从实验数据中被估计出来. 例如, [12]的研究表明, 如果对系统没有更多的先验信息, 即使一个NDS的传递函数矩阵(transfer function matrix, TFM)可以被准确估计出来, 其子系统之间的相互作用仍有可能无法辨识. 另一方面, [19]讨论了系统在固定参数域内的局部可辨识性和整个参数空间内的全局可辨识性, 并明确指出, 和前者相比后者处理起来困难得多.

为了明确在什么情况下能估计出NDS子系统之间的相互作用, [13]对具有广义子系统和扩散子系统耦合的NDS推导了一些基于特征向量的条件, 从而检测

此项工作得到国家自然科学基金资助, 项目批准号: 61733008和52061635102.

其结构变化. 对于子系统通过输出耦合的NDS, [11]证明了若其结构可辨识, 则由子系统动态决定的TFM的常数核恒为零向量. 在一些特殊情况下, 这个条件也变得充分. 在NDS具有任意结构时, [18]研究了子系统之间的相互作用是否能从数据中估计出来的问题, 但目前只得到了充分条件. 如果能够获得NDS在特定连接下全局可辨识的条件, 则可以自然地推广到连接系数未知等更一般的情形. 同时, 存在实际的工程问题, 比如结构已知的电网系统由于未知的因素出现短路、断路等而无法被监测出, 可能导致巨大的经济损失. 因此, 研究特定结构下的NDS的全局可辨识性, 无论对理论或实际问题都具有重要意义.

本文研究了在特定连接下, 针对[2],[7],[18]中采用的NDS模型, 使其子系统之间的相互作用可以通过实验数据进行辨识的问题. 该NDS模型允许每个子系统具有不同动态, 且子系统之间可以具有任意有向连接. 实际上, [11],[12],[13]等所采用的模型都是该NDS模型的特例. 该模型可以视之为目前最一般的一种线性时不变NDS模型. 我们证明了若每个子系统的外部输入到内部输出之间的TFM是正规行满秩(full normal row rank, FNRR)的, 则NDS结构可辨识的充分必要条件是, 一个由其内联结构决定的矩阵是列满秩(full column rank, FCR)的. 结果表明, 特定连接下NDS的全局可辨识性最终可以转化为便于检验的代数判据. 通过数值例计算验证了理论结果的正确性. 在该仿真实验中, 选择伪随机码作为所构建的人工NDS的测试信号, 观察不同结构的NDS的外部输出之差在不可辨识区域附近和不稳定区域附近的变化情况. 我们发现, 该差异与系统稳定性密切相关, 并非随着连接矩阵到不可辨识区域距离的增加而单调递增. 这些结果为后续辨识实验的设计、测试信号的选取等提供了重要启示.

本文其余部分的大纲如下. 首先, 在第二节中给出了问题描述、采用的NDS模型以及一些预备知识. 第三节给出了NDS在特定连接下全局可辨识的充分必要条件, 以及在一些特殊问题上的应用. 第四节构建数值例计算并仿真验证了理论结果的正确性, 第五节给出结束语和需要进一步探讨的问题. 最后, 附录中对部分结果给予证明.

本文将用到下列符号: $\mathcal{N}, \mathcal{R}, \mathcal{R}^*$ 和 $\mathcal{C}$ 分别表示自然数, 实数, 非负实数和复数. $\mathcal{R}^m$ 和 $\mathcal{C}^m$ 分别表示 m 维欧几里得实空间和复空间. $|\cdot|$ 表示集合元素个数. $[\cdot]_{ij}$ 表示矩阵第 i 行 j 列的元素. $\perp$ 表示矩阵(右)零空间的基所构成的矩阵. $\text{diag}\{X_i\}_{i=1}^n$ 表示第 i 个对角块为 X_i 的对角阵. $\text{col}\{X_i\}_{i=1}^n$ 表示由 $X_i\}_{i=1}^n$ 堆积起来的向量/矩阵, 其第 i 个行块向量/矩阵是 X_i . $\text{vec}\{X\}$ 表示由矩阵 X 各列依次堆积构成的向量. $\deg X(\lambda)$ 表示关于 λ 的多项式 $X(\lambda)$ 的次数. 上标 T 表示矩阵/向量的转置. $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示对数值向下取整. 最后针对时间序列 $x(k), k = 0, 1, \dots$, 定义其对应的Hankel矩阵 $X_{[\ell, L]}$ 为

$$X_{[\ell, L]} = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(L-1) \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(\ell-1) & x(\ell) & \cdots & x(L+\ell-2) \end{bmatrix}$$

其中 $\ell, L \in \mathcal{N}$ 分别表示该矩阵的行块数和列块数.

2 问题描述和预备知识

在现实世界的NDS中, 子系统可能具有不同动态. 考虑线性时不变(linear time invariant, LTI)的NDS, [2],[7],[18]提出了一种模型. 具体地, 对由 N 个子系统组成的NDS Σ , 其第 i 个子系统 Σ_i 的动态可以被描述为

$$\begin{bmatrix} \delta(x(t, i)) \\ z(t, i) \\ y(t, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx}(i) & B_{xv}(i) & B_{xu}(i) \\ C_{zx}(i) & D_{zv}(i) & D_{zu}(i) \\ C_{yx}(i) & D_{yv}(i) & D_{yu}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t, i) \\ v(t, i) \\ u(t, i) \end{bmatrix} \quad (1)$$

在上述模型中, $\delta(\cdot)$ 表示函数对时间求导或前向时移算子. 换言之, 模型(1)可以表示连续时间系统或离散时间系统. t 和 i 分别表示时间变量和子系统的序号, $x(t, i)$ 表示第 i 个子系统 Σ_i 在 t 时刻的状态向量, $v(t, i)$ 和 $z(t, i)$ 分别表示其内部输入/输出向量, 即从其他子系统输入和向其他子系统输出的向量, $u(t, i)$ 、 $y(t, i)$ 分别表示其外部的输入/输出向量. 同时, NDS Σ 子系统之间的连接可以由以下等式来描述

$$v(t) = \Phi z(t) \quad (2)$$

其中 $v(t)$ 和 $z(t)$ 分别表示整个NDS Σ 的内部输入/输出向量, 即 $z(t) = \text{col}\{z(t, i)\}_{i=1}^N$, $v(t) = \text{col}\{v(t, i)\}_{i=1}^N$. 矩阵 Φ 表示NDS Σ 不同子系统之间的相互作用, 称为子系统连接矩阵(subsystem connection matrix, SCM). 如果将每个子系统看作一个节点, 将SCM的每个非零元素看作一条边, 则可以构建关于NDS Σ 的图模型, 我们称之为关于NDS的拓扑结构.

为明确表明NDS Σ 受到其SCM Φ 的影响, 有时记之为 $\Sigma(\Phi)$. 对系统的外部输出也采取类似的表述方式 $y(t, \Phi)$. 本文采用以下假设.

A.1 向量 $u(t, i)$, $v(t, i)$, $x(t, i)$, $y(t, i)$ 和 $z(t, i)$ 的维数分别是 m_{ui} , m_{vi} , m_{xi} , m_{yi} 和 m_{zi} .

A.2 NDS Σ 是适定的. 等价地, 矩阵 $I - \Phi \text{diag}\{D_{zv}(i)\}_{i=1}^N$ 可逆.

其中, A.1表示各向量的大小. 利用这些符号定义整数 m_x, m_z, m_v 分别为 $m_x = \sum_{i=1}^N m_{xi}$, $m_z = \sum_{i=1}^N m_{zi}$, $m_v = \sum_{i=1}^N m_{vi}$. 显然, SCM Φ 是一个 $m_v \times m_z$ 维的实数矩阵. 其次, NDS的适定性意味着其状态唯一地取决于其初始值和外部输入, 因此A.2是系统正常工作的必要条件[2],[15],[16]. 总体而言上述假设条件并不苛刻.

令 $x(0) = \text{col}\{x(0, i)\}_{i=1}^N$, $u(t) = \text{col}\{u(t, i)\}_{i=1}^N$, $y(t, \Phi) = \text{col}\{y(t, i, \Phi)\}_{i=1}^N$. 在推导NDS Σ 满足结构可辨识在计算上可行的条件之前, 首先需要给出其在特定连接下的全局可辨识性的定义.

定义1 由(1)和(2)描述的NDS Σ 在满足A.2的特定SCM Φ_0 下是全局可辨识的, 若对任意初始状态向量 $x(0)$ 及满足A.2的任意SCM Φ , 存在至少一个外部输入 $u(t)$, 使得NDS $\Sigma(\Phi)$ 的外部输出 $y(t, \Phi)$ 不同于NDS $\Sigma(\Phi_0)$ 的外部输出 $y(t, \Phi_0)$. 反之, 则称NDS $\Sigma(\Phi_0)$ 是全局不可辨识的.

定义1借鉴了[18]中关于NDS在任意结构下的全局可辨识性定义. 表明若一个NDS $\Sigma(\Phi_0)$ 全局不可辨识, 则无论激励它的是何种测试信号、实验数据有多长以

及采用的是何种辨识算法, 仅通过辨识实验和估计都无法从数据中区分其拓扑结构. 因此, $NDS \Sigma(\Phi_0)$ 的全局可辨识性是进行结构辨识所要求的一般性质.

考虑到仿真实验需要选取合适长度和类型的测试信号, 即需有足够的信息来激励NDS在不同结构下产生不同的外部输出. 基于[14]及其参考文献中的结论, 我们引入持续激励信号的概念并描述其特性.

定义 2 对于一个给定的正实数 ℓ , $NDS \Sigma$ 的外部输入序列 $u_T = \text{col}\{u(t)|_{t=0}^{T-1}\}$ 是 ℓ 阶持续激励的, 若矩阵 $U_{[\ell, T-\ell+1]}$ 行满秩 (full row rank, FRR).

根据定义2, 外部输入信号 u_T 需足够长才能满足 ℓ 阶持续激励的要求. 即 $T \geq \ell N + \ell - 1$, 其中 N 是子系统数目.

引理 1 基于 NDS 的外部输入/输出序列 $u(t)|_{t=0}^{\infty}$ 和 $y(t)|_{t=0}^{\infty}$, 定义矩阵

$$O_{[L, T-L+1]} = \begin{bmatrix} U_{[L, T-L+1]} \\ Y_{[L, T-L+1]} \end{bmatrix} \quad (3)$$

若 u_T 是 $m_x + L$ 阶持续激励的, 则 NDS 任意 L 长度的输入/输出轨迹 $\text{col}\{\tilde{u}_L, \tilde{y}_L\}$ 都可表示为 $O_{[L, T-L+1]}$ 列向量的线性组合. 即存在 $\eta \in \mathcal{R}^{T-L+1}$ 满足 $\text{col}\{\tilde{u}_L, \tilde{y}_L\} = O_{[L, T-L+1]} \eta$. 反过来, 矩阵 $O_{[L, T-L+1]}$ 各列的任意线性组合 $O_{[L, T-L+1]} \eta$ 都对应 NDS 的一个 L 长度的输入/输出轨迹.

引理1表明, 持续激励的信号及其对应的系统输出能够表示NDS在任意激励下的输入/输出行为. 换言之, 不同结构的NDS在任意外部输入信号下的输出相等, 等价于其在持续激励的输入作用下的输出相等.

3 结构可辨识性

针对子系统动态特性已知且结构固定为 Φ_0 的 $NDS \Sigma(\Phi_0)$, 为建立其结构全局可辨识的条件, 首先定义以下TFM $G_{zu}(\lambda, i)$, $G_{zv}(\lambda, i)$, $G_{yu}(\lambda, i)$, $G_{yv}(\lambda, i)$.

$$\begin{bmatrix} G_{yu}(\lambda, i) & G_{yv}(\lambda, i) \\ G_{zu}(\lambda, i) & G_{zv}(\lambda, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{yu}(i) & D_{yv}(i) \\ D_{zu}(i) & D_{zv}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{yx}(i) \\ C_{zx}(i) \end{bmatrix} \times [\lambda I_{m_{xi}} - A_{xx}(i)]^{-1} \begin{bmatrix} B_{xu}(i) & B_{xv}(i) \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中 λ 表示连续NDS的Laplace变换变量 s 或者离散NDS的 z 变换变量 z . 定义分块对角的TFM $G_{\star\#}(\lambda)$, $\star = z$ 或 y , $\# = u$ 或 v , 如下,

$$G_{\star\#}(\lambda) = \text{diag}\{G_{\star\#}(\lambda, i)|_{i=1}^N\} \quad (5)$$

注意到在任意结构 Φ 下, $NDS \Sigma(\Phi)$ 的适定性意味着矩阵 $I_{m_z} - \Phi \text{diag}\{D_{zv}(i)|_{i=1}^N\}$ 是可逆的. [18]中已经证明, 该条件等价于TFM $I_{m_z} - G_{zv}(\lambda)\Phi$ 是正规满秩 (full normal rank, FNR) 的. 这意味着该TFM的逆总是存在. 据此, 定义关于整个NDS $\Sigma(\Phi)$ 的TFM $H(\lambda, \Phi)$

$$H(\lambda, \Phi) = G_{yu}(\lambda) + G_{yv}(\lambda)\Phi[I_{m_z} - G_{zv}(\lambda)\Phi]^{-1}G_{zu}(\lambda) \quad (6)$$

引理 2 假设 $NDS \Sigma$ 是适定的. 则其在特定的 $SCM \Phi_0$ 下全局可辨识, 当且仅当对任意 $SCM \Phi \neq \Phi_0$, 对几乎所有的 $\lambda \in \mathcal{C}$, $H(\lambda, \Phi) \neq H(\lambda, \Phi_0)$.

引理2与[18]中关于NDS任意SCM全局可辨识的结论类似, 证明过程可以参考其中的相关内容, 此处省略. 若参数空间中任意 $SCM \Phi \neq \Phi_0$ 均对应不同于 $H(\lambda, \Phi_0)$ 的TFM, 则 $NDS \Sigma(\Phi_0)$ 全局可辨识. 从应用的角度看, 若存在一组子系统的连接方式导致NDS对每个外部激励信号都产生与 $\Sigma(\Phi_0)$ 同样的外部输出, 则不难判定这组连接对应了 $NDS \Sigma(\Phi_0)$ 的同一个TFM. 另一方面, 若不同于 Φ_0 的SCM对应了同一个TFM, 则NDS在相同激励下的外部输出通常很难被区分.

当NDS每个子系统 $\Sigma_i, i = 1, \dots, N$, 的动态特性均已知, 其TFM $G_{zv}(\lambda, i)|_{i=1}^N, G_{yv}(\lambda, i)|_{i=1}^N$ 等都是确定的. 接下来的数学推导将涉及线性系统理论中的一些知识[16]. 首先, 令 $r_{yv}^{[i]}, i = 1, \dots, N$, 表示TFM $G_{yv}(\lambda, i)$ 的正规秩. 显然 $0 \leq r_{yv}^{[i]} \leq \max\{m_{yi}, m_{vi}\}$, 考虑到每个TFM $G_{yv}(\lambda, i)$ 均为有理分式矩阵, 对其做Smith-McMillan分解

$$G_{yv}(\lambda, i) = U_{yv}(\lambda, i) \begin{bmatrix} \text{diag}\left\{\frac{\pi_{yv}^{[j]}(\lambda, i)}{\kappa_{yv}^{[j]}(\lambda, i)} \middle|_{j=1}^{r_{yv}^{[i]}}\right\} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_{yv}(\lambda, i) \quad (7)$$

其中零矩阵具有相应的维数, $U_{yv}(\lambda, i)$ 和 $V_{yv}(\lambda, i)$ 分别是 $m_{yi} \times m_{yi}$ 和 $m_{vi} \times m_{vi}$ 维的单模阵, $\pi_{yv}^{[i]}(\lambda, i)|_{j=1}^{r_{yv}^{[i]}}$ 和 $\kappa_{yv}^{[j]}(\lambda, i)|_{j=1}^{r_{yv}^{[i]}}$ 是不恒为零的有限维实系数多项式. 对每个单模阵 $V_{yv}(\lambda, i)$, 定义其逆矩阵 $S_{yv}(\lambda, i) = V_{yv}^{-1}(\lambda, i) = [S_{yv}^{[1]}(\lambda, i) \ S_{yv}^{[2]}(\lambda, i)]$, 其中 $S_{yv}^{[1]}(\lambda, i)$ 具有前 $r_{yv}^{[i]}$ 列. 显然, $S_{yv}(\lambda, i)$ 也是一个单模阵, 而 $S_{yv}^{[1]}(\lambda, i)$ 和 $S_{yv}^{[2]}(\lambda, i)$ 均为在每个 $\lambda \in \mathcal{C}$ 处都FCR的多项式矩阵. $S_{yv}^{[2]}(\lambda, i)$ 的列实际上张成了TFM $G_{yv}(\lambda, i)$ 的右零空间. 令 $\hat{r}_{yv}^{[i]}, i = 1, \dots, N$, 表示 $G_{yv}(\lambda, i)$ 右零空间的维数, 则 $S_{yv}^{[2]}(\lambda, i)$ 具有 $\hat{r}_{yv}^{[i]}$ 列, 且 $r_{yv}^{[i]} + \hat{r}_{yv}^{[i]} = m_{vi}$.

另一方面, 考虑到TFM $G_{zv}(\lambda, i)$ 为 $m_{zi} \times m_{vi}$ 维的有理分式矩阵, 则一定存在 $m_{zi} \times m_{vi}$ 维和 $m_{vi} \times m_{vi}$ 维互质的多项式矩阵 $N_{zv}(\lambda, i)$ 和 $D_{zv}(\lambda, i)$, 使得 $G_{zv}(\lambda, i) = N_{zv}(\lambda, i)D_{zv}^{-1}(\lambda, i)$. 在线性系统理论中, 称 $N_{zv}(\lambda, i)D_{zv}^{-1}(\lambda, i)$ 为 $G_{zv}(\lambda, i)$ 的一个右矩阵分式描述 (matrix-fraction description, MFD).

值得注意的是, 单模阵 $U_{yv}(\lambda, i), V_{yv}(\lambda, i), S_{yv}(\lambda, i)$ 和多项式矩阵 $N_{zv}(\lambda, i), D_{zv}(\lambda, i)$ 均可以单独对每个子系统计算得到. 通常NDS子系统维数不会很高, 意味着其TFM的Smith-McMillan标准形和右MFD的计算一般不复杂, 因此在大规模NDS的分析和综合中可以实现. 对每个子系统 $\Sigma_i, i = 1, \dots, N$, $D_{zv}^{-1}(\lambda, i)S_{yv}^{[2]}(\lambda, i)$ 是一个 $m_v \times \hat{r}_{yv}^{[i]}$ 维的有理分式矩阵, 则分别存在 $m_v \times \hat{r}_{yv}^{[i]}, m_v \times \hat{r}_{yv}^{[i]}, \hat{r}_{yv}^{[i]} \times \hat{r}_{yv}^{[i]}$ 维的多项式矩阵 $R(\lambda, i)$ 及互质的 $Q(\lambda, i), \Omega(\lambda, i)$, 满足 $D_{zv}^{-1}(\lambda, i)S_{yv}^{[2]}(\lambda, i) = R(\lambda, i) + Q(\lambda, i)\Omega^{-1}(\lambda, i)$. 其中 $Q(\lambda, i)\Omega^{-1}(\lambda, i)$ 是相应严真有理分式阵的一个右MFD.

利用上述符号, 定义 $\hat{r}_{yv} = \sum_{i=1}^N \hat{r}_{yv}^{[i]}$ 以及 $m_v \times$

$\hat{r}_{yv}, m_z \times \hat{r}_{yv}$ 维的多项式矩阵 $X(\lambda)$ 和 $Y(\lambda)$ 为

$$X(\lambda) = \text{diag}\{D_{zv}(\lambda, i)[R(\lambda, i)\Omega(\lambda, i) + Q(\lambda, i)]\}_{i=1}^N \quad (8)$$

$$Y(\lambda) = \text{diag}\{N_{zv}(\lambda, i)[R(\lambda, i)\Omega(\lambda, i) + Q(\lambda, i)]\}_{i=1}^N \quad (9)$$

根据定义, $X(\lambda)$ 和 $Y(\lambda)$ 均为分块对角的有限次多项式矩阵. 基于这些结果, 可以得到下面关于(1)和(2)所描述的NDS在特定SCM Φ_0 下全局可辨识的充要条件. 具体的证明过程请参考附录.

定理 1 假设NDS Σ 满足A.1和A.2. 若TFM $G_{zu}(\lambda)$ FNRR, 则 $\Sigma(\Phi_0)$ 全局可辨识, 当且仅当对任意非零实向量 $\delta \in \mathcal{R}^{m_v}$, 以下关于无穷阶多项式向量 $\alpha(\lambda)$ 的方程无解,

$$[X(\lambda) - \Phi_0 Y(\lambda)]\alpha(\lambda) = \delta \quad (10)$$

注 1 值得指出的是, 定理1涉及到的关于每个子系统 Σ_i 的右MFD $N_{zv}(\lambda, i)D_{zv}^{-1}(\lambda, i)$ 和 $Q(\lambda, i)\Omega^{-1}(\lambda, i)$ 并非唯一, 但是这种非唯一性不会影响定理1的结论. 具体地, 对任意 $m_{vi} \times m_{vi}$ 维非奇异多项式矩阵 $W_1(\lambda, i)$ 令 $\bar{N}_{zv}(\lambda, i) = N_{zv}(\lambda, i)W_1(\lambda, i)$, $\bar{D}_{zv}(\lambda, i) = D_{zv}(\lambda, i) \times W_1(\lambda, i)$. 则根据定义, $\bar{N}_{zv}(\lambda, i)\bar{D}_{zv}^{-1}(\lambda, i)$ 也是 $G_{zv}(\lambda, i)$ 的一个右MFD. 相应地, $\bar{D}_{zv}^{-1}(\lambda, i)S_{yv}^{[2]}(\lambda, i) = \tilde{R}(\lambda, i) + \tilde{Q}(\lambda, i)\Omega^{-1}(\lambda, i)$, 其中 $\tilde{R}(\lambda, i) = W_1^{-1}(\lambda, i) \times R(\lambda, i)$, $\tilde{Q}(\lambda, i) = W_1^{-1}(\lambda, i)Q(\lambda, i)$, 且 $\tilde{Q}(\lambda, i)\Omega^{-1}(\lambda, i)$ 也是一个严真的有理分式矩阵. 定义多项式矩阵

$$X_1(\lambda) = \text{diag}\{\bar{D}_{zv}(\lambda, i)[\tilde{R}(\lambda, i)\Omega(\lambda, i) + \tilde{Q}(\lambda, i)]\}_{i=1}^N$$

$$Y_1(\lambda) = \text{diag}\{\bar{N}_{zv}(\lambda, i)[\tilde{R}(\lambda, i)\Omega(\lambda, i) + \tilde{Q}(\lambda, i)]\}_{i=1}^N$$

显然 $X_1(\lambda) \equiv X(\lambda)$, $Y_1(\lambda) \equiv Y(\lambda)$. 因此TFM $G_{zu}(\lambda, i)$ 的右MFD $N_{zv}(\lambda, i)D_{zv}^{-1}(\lambda, i)$ 的非唯一性不影响定理1的结论.

另一方面, 对任意 $\hat{r}_{yv}^{[i]} \times \hat{r}_{yv}^{[i]}$ 维非奇异多项式矩阵 $W_2(\lambda, i)$, 令 $\bar{Q}(\lambda, i) = Q(\lambda, i)W_2(\lambda, i)$, $\bar{\Omega}(\lambda, i) = \Omega(\lambda, i) \times W_2(\lambda, i)$, 则 $\bar{Q}(\lambda, i)\bar{\Omega}^{-1}(\lambda, i)$ 和 $Q(\lambda, i)\Omega^{-1}(\lambda, i)$ 为同一个严真有理分式矩阵的不同右MFD. 定义多项式矩阵

$$X_2(\lambda) = \text{diag}\{D_{zv}(\lambda, i)[R(\lambda, i)\bar{\Omega}(\lambda, i) + \bar{Q}(\lambda, i)]\}_{i=1}^N$$

$$Y_2(\lambda) = \text{diag}\{N_{zv}(\lambda, i)[R(\lambda, i)\bar{\Omega}(\lambda, i) + \bar{Q}(\lambda, i)]\}_{i=1}^N$$

根据方程(10), $[X_2(\lambda) - \Phi_0 Y_2(\lambda)]\alpha(\lambda) = [X(\lambda) - \Phi_0 Y(\lambda)]\hat{\alpha}(\lambda)$, 其中 $\hat{\alpha}(\lambda) = \text{diag}\{W_2(\lambda, i)\}_{i=1}^N \alpha(\lambda)$. 显然, 无穷阶多项式 $\hat{\alpha}(\lambda)$ 和 $\alpha(\lambda)$ 之间存在双射关系. 因此方程(10)无解等价于方程 $[X_2(\lambda) - \Phi_0 Y_2(\lambda)]\alpha(\lambda) = \delta$ 无解. 这意味着右MFD $Q(\lambda, i)\Omega^{-1}(\lambda, i)$ 的非唯一性也不影响定理1的结论.

令 r_{Φ_0} 表示 $X(\lambda) - \Phi_0 Y(\lambda)$ 的正规秩. 显然 $0 \leq r_{\Phi_0} \leq \max\{m_v, \hat{r}_{yv}\}$. 对有限维多项式矩阵 $X(\lambda) - \Phi_0 Y(\lambda)$ 做Smith分解

$$X(\lambda) - \Phi_0 Y(\lambda) = U_{\Phi_0}(\lambda) \begin{bmatrix} \text{diag}\left\{\mu_{\Phi_0}^{[j]}(\lambda)\right\}_{j=1}^{r_{\Phi_0}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_{\Phi_0}(\lambda) \quad (11)$$

其中零矩阵具有相应的维数, $U_{\Phi_0}(\lambda)$ 和 $V_{\Phi_0}(\lambda)$ 分别是 $m_v \times m_v$ 和 $\hat{r}_{yv} \times \hat{r}_{yv}$ 维的单模阵, $\mu_{\Phi_0}^{[j]}(\lambda)|_{j=1}^{r_{\Phi_0}}$ 是不恒为零的有限维实系数多项式. 设单模阵 $U_{\Phi_0}(\lambda)$ 的逆为 $T_{\Phi_0}(\lambda) = U_{\Phi_0}^{-1}(\lambda) = [T_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda)^T \quad T_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda)^T]^T$, 且 $T_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda)$ 具有 r_{Φ_0} 行. 显然 $T_{\Phi_0}(\lambda)$ 也是一个单模阵, 而 $T_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda)$ 和 $T_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda)$ 均为在每个 $\lambda \in \mathcal{C}$ 处都FRR的多项式矩阵.

基于这些符号, 可以得到下面关于(1)和(2)所描述的NDS Σ 在计算上可行的充分必要条件, 以判定其在特定SCM Φ_0 下是否全局可辨识. 具体的证明过程请参考附录.

定理 2 假设NDS Σ 满足A.1和A.2. 若TFM $G_{zu}(\lambda)$ FNRR, 则 $\Sigma(\Phi_0)$ 全局可辨识, 当且仅当实数矩阵 $T = \text{col}\{T^{[k]}|_{k=0}^p\}$ 为FCR. 其中 $p = \max\{\deg[T_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda)]_{ij}\}$, 且 $T^{[k]}, k = 0, 1, \dots, p$, 为 $T_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda)$ 的系数矩阵, 即 $T_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda) = \sum_{k=0}^p \lambda^k T^{[k]}$.

注 2 定理2表明, 由(1)和(2)描述的NDS在特定连接下的全局可辨识性最终可以转化为便于检验的代数判据. 若矩阵 T 非FCR, 则存在一个包含SCM Φ_0 的区域 $\mathcal{E}(\Phi_0)$

$$\mathcal{E}(\Phi_0) = \{\Phi | \Phi = \Phi_0 + T^\perp [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_{m_z}]\} \quad (12)$$

其中 $\gamma_j \in \mathcal{R}^{\hat{r}_T}, j = 1, \dots, m_z$, $\hat{r}_T$ 是 T 的右零空间即矩阵 $T^\perp$ 的维数. 任意SCM $\Phi_e \in \mathcal{E}(\Phi_0)$, 都满足NDS $\Sigma(\Phi_e)$ 适定且稳定; 且在相同信号激励下, 都使得外部输出 $y(t, \Phi_e)$ 相同. 我们称 $\mathcal{E}(\Phi_0)$ 为关于SCM Φ_0 的不可辨识区域, 是一个无限域. 事实上, 根据(12), $\Sigma(\Phi_0)$ 的全局可辨识性和其在 Φ_0 附近邻域内的局部可辨识性是等价的.

定理2可以应用于已知子系统连接位置和系数的NDS, 如电网系统和某些传感器网络等. 在实际工程问题中, 存在一类NDS, 无论子系统之间的相互作用怎么改变, 其SCM Φ 中某些位置的元素总是固定不变. 如每个子系统都不存在自环, 即SCM Φ 对角块上的元素固定为零, 等等. 事实上在NDS的分析与综合中, 这是一个普遍的约束. 定义集合 $\mathcal{S}$ 来描述这一类NDS的结构信息,

$$\mathcal{S} = \{\Phi | [\Phi]_{ij} \text{ 已知}, i \in \mathbb{I}_j, j \in \mathbb{J}\} \quad (13)$$

其中 $\mathbb{I}_j \subseteq \{1, \dots, m_v\}, \mathbb{J} \subseteq \{1, \dots, m_z\}, |\mathbb{I}_j| = q(j)$. 不失一般性地, 令 $\mathbb{I}_j = \{k_{j,1}, k_{j,2}, \dots, k_{j,q(j)}\}$ 且 $1 \leq k_{j,1} < \dots < k_{j,q(j)} \leq m_v$. 同时, 记矩阵 T 的列向量为 $\mathbf{t}_i \in \mathcal{R}^{m_v - r_{\Phi_0}}, i = 1, \dots, m_v$, 即 $T = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \dots \quad \mathbf{t}_{m_v}]$.

推论 1 假设NDS Σ 的结构信息包含在集合 $\mathcal{S}$ 中. 若TFM $G_{zu}(\lambda)$ FNRR, 则 $\Sigma(\Phi_0)$ 全局可辨识, 当且仅当下述定义的每个矩阵 $T_j, j \in \mathbb{J}$, 都为FCR,

$$T_j = \{\mathbf{t}_i | i \in \{1, \dots, m_v\} \setminus \mathbb{I}_j\} \quad (14)$$

注 3 对任意 $\bar{\gamma}_j \in \mathcal{R}^{\hat{r}_{T_j}}, j \in \mathbb{J}$, 定义向量 $\bar{\delta}_j = T_j^\perp \bar{\gamma}_j = [\bar{\delta}_{1,j} \quad \bar{\delta}_{2,j} \quad \dots \quad \bar{\delta}_{m_v - q(j),j}]^T$, 其中 $\hat{r}_{T_j}$ 为 T_j 的右零空间即矩阵 $T_j^\perp$ 的维数. 对于具有集合 $\mathcal{S}$ 所描述的结构信息的NDS Σ , 若推论1的条件没有得到满足, 则同样存在

一个不可辨识的区域

$$\mathcal{E}_s(\Phi_0) = \{\Phi | \Phi = \Phi_0 + [\delta_1 \ \delta_2 \ \cdots \ \delta_{m_z}]\} \quad (15)$$

其中 $\delta_j = [\delta_{1,j} \ \delta_{2,j} \ \cdots \ \delta_{m_v,j}]^T, j = 1, \dots, m_z$ 且 $\delta_{i,j}$ $i \in \{1, \dots, m_v\}$, 满足以下等式

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \in \mathbb{I}_j \\ \bar{\delta}_{s,j}, & s = i - |\{1, \dots, i\} \cap \mathbb{I}_j| \quad i \notin \mathbb{I}_j \end{cases} \quad (16)$$

任意 $SCM \Phi_s \in \mathcal{E}_s(\Phi_0)$, 都满足 $NDS \Sigma(\Phi_s)$ 适定且稳定; 且在相同信号激励下, 都使得外部输出 $y(t, \Phi_s)$ 相同.

注意到, (13) 所对应的 $SCM \Phi$ 中, 默认未知的 $[\Phi]_{ij}$, $i \in \{1, \dots, m_v\}, j \in \{1, \dots, m_z\}$ 是互相独立的. 考虑更一般的情况, 当 $NDS \Sigma$ 的 $SCM \Phi$ 满足以下约束时

$$\Phi(\theta) = \Phi^{[0]} + \sum_{k=1}^q \theta^{[k]} \Phi^{[k]} \quad (17)$$

其中 $\Phi^{[0]}$ 表示固定不变的常数 SCM , $\Phi^{[k]} \in \mathcal{R}^{m_v \times m_z}, k = 1, \dots, q$, 表示已知的结构信息, 如哪些子系统之间存在固定不变的比例关系的连接等; $\theta_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, q$, 为可变或未知参数, 如子系统之间的连接系数, 在系统运行中能被改变或需要根据实验数据进行估计; $1 \leq q \leq m_v m_z$ 表示 Φ 中互相独立的参数个数. (17) 意味着 $SCM \Phi$ 中某些位置的元素是相关的. 对这样的 $NDS \Phi(\theta_0)$, 也能根据定理2建立其关于特定连接的参数向量 $\theta_0 = col\{\theta_0^{[k]} |_{k=1}^q\}$ 的全局可辨识条件.

推论 2 假设 $NDS \Sigma$ 的 $SCM \Phi$ 由 (17) 式描述. 若 $TFM G_{zu}(\lambda)$ $FNRR$, 则 $\Sigma(\Phi(\theta_0))$ 全局可辨识, 当且仅当矩阵 $[vec(T\Phi^{[1]}) \ vec(T\Phi^{[2]}) \ \cdots \ vec(T\Phi^{[q]})]$ FCR .

推论1可以作为推论2的一种特殊情况. 即推论2也可用于 $SCM \Phi$ 的各个元素是相互独立的情形. 但在一般情况下, 推论1的条件的计算复杂度远低于推论2的条件.

在许多实际应用问题中, 关于 NDS 的 $SCM \Phi$ 的先验信息仅包含非零元素的位置, 而无法精确得知其数值大小. 比如在基因调控网络中, 通常只能根据生物学知识推断哪些基因或其他化学分子之间存在直接的相互作用, 但无法知道它们之间的作用强度. 对这种情况, 可基于定理1得到下面的推论.

推论 3 定义实对角阵 $P = diag\{p_l |_{l=1}^{m_z}\}$, 其中每个 $p_l \in \mathcal{R}, l \in \{1, \dots, m_z\}$ 是代数独立的. 若 $TFM G_{zu}(\lambda)$ $FNRR$, 则 $\Sigma(\Phi_0)$ 全局可辨识, 当且仅当对任意非零实向量 $\delta \in \mathcal{R}^{m_v}$, 以下关于无穷阶多项式向量 $\alpha(\lambda)$ 和 $\beta(\lambda)$ 的方程无解,

$$\begin{bmatrix} X(\lambda) & -\Phi_0 P \\ Y(\lambda) & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(\lambda) \\ \beta(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

定理2中需要对 $X(\lambda) - \Phi_0 Y(\lambda)$ 作 $Smith$ 分解, 其计算复杂度为矩阵维数的三次方的数量级, 因此在大规模 NDS 中通常难以实现. 基于推论3, 利用[20]中赋值拟阵(valuated matroid)的相关结论, 可以通过图论的方法规避具体的 $Smith$ 标准形计算. 另一方面, 根据 P 对角

元素的代数独立性, 有希望得到 $NDS \Sigma$ 只依赖于 Φ_0 非零元素的位置而不依赖其具体数值的全局可辨识性判断. 目前我们正在展开这方面的研究.

当 $TFM G_{yv}(\lambda)$ 满足正规列满秩(full normal column rank, $FNCR$) 条件, 或者进一步当 $TFM G_{zu}(\lambda)$ 非 $FNRR$ 时, 我们已经得到了与定理1相对应的, 关于 $NDS \Sigma(\Phi_0)$ 全局可辨识的充分必要条件. 由于篇幅限制, 将在其他合适的场合报告. 另外, 推论1-3的证明也由于篇幅限制未包含在本论文中.

4 数值仿真

为了验证上一节的理论结果, 本节人工构建了一个包含两个子系统和一条边的简单 NDS . 每个子系统 $\Sigma_i, i = 1, 2$, 的系统矩阵以及结构改变前后对应的 $SCM \Phi_0, \Phi_e$ 分别为

$$\begin{aligned} A_{xx}(i) &= \begin{bmatrix} -2.0000 & -1.0000 \\ 4.0000 & -7.0000 \end{bmatrix} \\ B_{xv}(i) &= \begin{bmatrix} -0.3000 & 0.1000 \\ 1.1000 & 0.8000 \end{bmatrix}, B_{xu}(i) = \begin{bmatrix} 0.2900 & 0 \\ 0 & -1.6000 \end{bmatrix} \\ C_{zx}(i) &= [1.0000 \ 1.0000], C_{yx}(i) = [1.0000 \ -1.0000] \\ D_{zv}(i) &= [0 \ -1.0000], D_{yv}(i) = [0.2000 \ 0.1000] \\ D_{zu}(i) &= [-0.3700 \ 1.1500], D_{yu}(i) = [2.1800 \ -0.4600] \\ \Phi_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Phi_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.0000 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据这些系统矩阵可知, $TFM G_{zu}(\lambda, i), i = 1, 2$, 一定 $FNRR$. 经过简单的数值计算, 多项式矩阵 $S_{yv}^{[2]}(\lambda, i) = [-1 \ 2]^T$, 且 $TFM G_{zv}(\lambda, i), i = 1, 2$, 的一个右 MFD 可以写为

$$\begin{aligned} G_{zv}(\lambda, i) &= [0.8000\lambda - 2.2000 \quad -\lambda^2 - 8.1000\lambda - 16.1000] \\ &\quad \begin{bmatrix} (\lambda + 3.0000)(\lambda + 6.0000) & 0 \\ 0 & (\lambda + 3.0000)(\lambda + 6.0000) \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

基于多项式矩阵 $R(\lambda, i), Q(\lambda, i), \Omega(\lambda, i)$ 及 $X(\lambda), Y(\lambda)$ 的定义, $NDS \Sigma(\Phi_0)$ 对应的多项式矩阵 $X(\lambda) - \Phi_0 Y(\lambda)$ 为

$$\begin{aligned} X(\lambda) - \Phi_0 Y(\lambda) &= (\lambda + 6.0000) \times \begin{bmatrix} -\lambda - 3.0000 & 0 \\ 2.0000\lambda + 6.0000 & 0 \\ 2.0000\lambda + 5.0000 & -\lambda - 3.0000 \\ 0 & 2.0000\lambda + 6.0000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

通过计算多项式矩阵 $X(\lambda) - \Phi_0 Y(\lambda)$ 的 $Smith$ 标准形, 最终得到定理2的判断矩阵 T 为

$$T = \begin{bmatrix} -5.0000 & 0 & -3.0000 & -1.5000 \\ 2.0000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -2.0000 & 0 & -1.0000 & -0.5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

显然矩阵 T 为非 FCR . 根据定理2的结论, 该人工构造的 $NDS \Sigma(\Phi_0)$ 全局不可辨识. 即存在 $SCM \Phi_e \neq \Phi_0$

使得对应任意的外部输入信号, $y(t, \Phi_e)$ 和 $y(t, \Phi_0)$ 无法被区分. 基于(12)确定一个满足条件的SCM $\Phi_e \in \mathcal{E}(\Phi_0)$.

根据引理1, 选择具有持续激励特性的测试信号, 如伪随机码(m 序列)作为NDS $\Sigma(\Phi_0)$ 和 $\Sigma(\Phi_e)$ 的外部输入. 若两者对应的输出是相同的, 则可以认为NDS $\Sigma(\Phi_0)$ 全局不可辨识.

图1显示了NDS $\Sigma_i(\Phi_0)$ 和 $\Sigma_i(\Phi_e)$, $i = 1, 2$, 的外部输出时间序列及两者的相对差值. 其中横坐标表示采样时间, 在实验中等于采样周期 $\times$ 采样步长. 具体地, 令 A_0 和 A_e 分别为 $\Sigma(\Phi_0)$ 和 $\Sigma(\Phi_e)$ 的状态转移阵, $\rho_{\max}(\cdot)$ 和 $\rho_{\min}(\cdot)$ 分别表示矩阵特征值绝对值的最大和最小值. 根据引理1, 在实际仿真中, 对两个子系统独立输入两组取值为+0.5和-0.5的 m 序列, 设置NDS的采样周期和步长分别为 $\frac{0.1000}{\max\{\rho_{\max}(A_0), \rho_{\max}(A_e)\}}$, $\max\{1 \times 10^4, 100 \times [\frac{\max\{\rho_{\max}(A_0), \rho_{\max}(A_e)\}}{\min\{\rho_{\min}(A_0), \rho_{\min}(A_e)\}}]\}$, 以保证在有足够信息去激励NDS输出之差的同时, 又避免带来太高的计算成本.

图1(a)中的纵坐标表示NDS的外部输出值, 上下两个子图分别对应子系统 Σ_1 和 Σ_2 . 每个子图中蓝色实线和红色虚线分别对应 $\Sigma_i(\Phi_0)$ 和 $\Sigma_i(\Phi_e)$. 定义 $\Sigma(\Phi_0)$ 和 $\Sigma(\Phi_e)$ 外部输出的相对差值为 $e_y(t) = \frac{y(t, \Phi_e) - y(t, \Phi_0)}{y(t, \Phi_0)}$, 图1(b)显示了 $e_y(t)$ 随时间的变化情况. 实线和虚线分别对应 Σ_1 和 Σ_2 . 虽然 $e_y(t)$ 不恒等于零, 但由于其幅值在 10^{-16} 的数量级, 可以认为是由数值计算带来的误差. 综合图1(a), 1(b)可以判定, 在 m 序列的激励下, NDS $\Sigma(\Phi_0)$ 和 $\Sigma(\Phi_e)$ 的结构并不能从输出数据中区分出来. 因此, 上一节中理论结果的正确性得到了验证.

下面讨论SCM Φ 到 Φ_0 的不可辨识区域 $\mathcal{E}(\Phi_0)$ 的距离和对应的输出之差的关系. 理论上, 若NDS Σ 的SCM Φ 发生变化且 $\Phi \notin \mathcal{E}(\Phi_0)$, 其外部输出也会改变. 不同于单变量系统, 多变量系统对不同方向上的输入可能产生不同的响应. 对于参数空间中某个确定的SCM $\tilde{\Phi}$, 定义SCM $\tilde{\Phi}(\tau)$ 为

$$\tilde{\Phi}(\tau) = \Phi_0 + \tau \cdot (\tilde{\Phi} - \Phi_0), \tau \in \mathcal{R}^* \quad (19)$$

随着参数 τ 从0开始逐渐增大, 固定在 $\tilde{\Phi} - \Phi_0$ 方向上的SCM $\tilde{\Phi}(\tau)$ 到 Φ_0 的距离也逐渐增加. 特别地, 当 $\tau = 0$ 时, $\Sigma(\tilde{\Phi}(0)) = \Sigma(\Phi_0)$ 是全局不可辨识的. 为了观察当 τ 增大时, 在相同的 m 序列的激励下, NDS $\Sigma(\tilde{\Phi}(\tau))$ 的输出 $y(t, \tilde{\Phi}(\tau))$ 相对 $\Sigma(\Phi_0)$ 的输出 $y(t, \Phi_0)$ 的变化情况, 定义 $\varepsilon_\tau(t) = y(t, \tilde{\Phi}(\tau)) - y(t, \Phi_0)$ 及以下符号

$$\begin{aligned} d_\tau^{[T]} &= \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{t=0}^{M-1} \varepsilon_\tau^T(t) \varepsilon_\tau(t)} \\ d_\tau^{[F]} &= \|H(\lambda, \tilde{\Phi}(\tau)) - H(\lambda, \Phi_0)\|_\infty \\ d_\tau^{[S]} &= \inf_{\Phi \in \mathcal{E}(\Phi_0)} \bar{\sigma}(\tilde{\Phi}(\tau) - \Phi) \end{aligned}$$

其中 M 是采样次数, $\bar{\sigma}(\cdot)$ 表示矩阵的最大奇异值, $\|\cdot\|_\infty$ 表示TFM的 $\mathcal{H}_\infty$ 范数. $d_\tau^{[T]}$ 和 $d_\tau^{[F]}$ 分别代表NDS $\Sigma(\tilde{\Phi}(\tau))$ 的外部输出和由(6)所定义的TFM与NDS $\Sigma(\Phi_0)$ 的相应函数之间的差别, 而 $d_\tau^{[S]}$ 代表 $\tilde{\Phi}(\tau)$ 到不可辨识区域 $\mathcal{E}(\Phi_0)$ 的距离.

根据定义, $d_\tau^{[T]}$ 表示 M 次采样后 $y(t, \tilde{\Phi}(\tau))$ 和 $y(t, \Phi_0)$

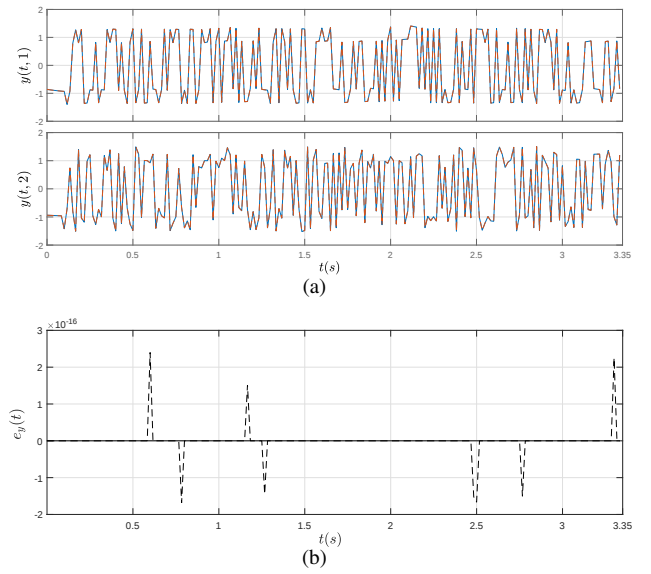


图 1: NDS $\Sigma(\Phi_0)$ 和 $\Sigma(\Phi_e)$ 的外部输出及其相对差值. (a) $\Sigma(\Phi_0)$ 和 $\Sigma(\Phi_e)$ 的外部输出时间序列; (b) $\Sigma(\Phi_0)$ 和 $\Sigma(\Phi_e)$ 外部输出的相对差值随时间的变化.

之差的 ℓ_2 范数的算术平均. 一个TFM的 $\mathcal{H}_\infty$ 范数是一种诱导范数, 表征其频率响应的最大奇异值的最大值[15]. 因此 $d_\tau^{[T]}$ 和 $d_\tau^{[F]}$ 可以分别衡量当 τ 增大时, NDS $\Sigma(\Phi_\tau)$ 相对于 $\Sigma(\Phi_0)$ 在时域和频域的变化大小. 另一方面, 矩阵的最大奇异值也是一种常用的衡量矩阵之差的诱导范数[17]. 从应用的角度来看, 上述数值是比较合理的.

针对SCM Φ_0 的每个元素, 在 $[-1, 1]$ 区间上产生独立的服从均匀分布的样本, 作为新的SCM的元素. 对每个SCM, 考虑 τ 以0.1为间隔从0增加到20, 在同一个方向上生成201个SCM样本. 从这些样本中去掉对应于不稳定NDS的SCM样本后, 选取了三个比较典型的方向 $\tilde{\Phi}_1$, $\tilde{\Phi}_2$, $\tilde{\Phi}_3$ 进行分析. 记根据这三个方向和(19)产生的SCM样本为 $\tilde{\Phi}_k(\tau)$, $k = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &= \begin{bmatrix} 0.5866 & 0.2437 \\ -0.2540 & -0.2118 \\ 1.6641 & -0.2814 \\ 0.5077 & -0.8223 \end{bmatrix}, \tilde{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} -0.8170 & 0.5795 \\ 0.2293 & -0.5293 \\ 0.0220 & -0.1040 \\ 0.1465 & 0.1387 \end{bmatrix} \\ \tilde{\Phi}_3 &= \begin{bmatrix} -0.4895 & 0.4504 \\ 0.7171 & -0.5402 \\ 1.8221 & 0.1521 \\ 0.3993 & 0.6213 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

计算结果如图2所示. 其中各个子图中的蓝色、红色和黑色曲线分别表示由 $\tilde{\Phi}_1$ 、 $\tilde{\Phi}_2$ 和 $\tilde{\Phi}_3$ 所生成的样本及其对应的NDS的特性. 在仿真计算中, 设定同前. 对每个NDS $\Sigma(\tilde{\Phi}_k(\tau))$, $k = 1, 2, 3$, 令 $A_k(\tau)$ 为其状态转移阵, 设置采样周期为 $\frac{0.1000}{\max\{\rho_{\max}(A_0), \rho_{\max}(A_k(\tau))\}}$, 步长为 $\max\{1 \times 10^4, 100 \times [\frac{\max\{\rho_{\max}(A_0), \rho_{\max}(A_k(\tau))\}}{\min\{\rho_{\min}(A_0), \rho_{\min}(A_k(\tau))\}}]\}$.

图2(a)表明, 在不同方向 $\tilde{\Phi}_k$, $k = 1, 2, 3$, 上, $\tilde{\Phi}_k(\tau)$ 到不可辨识区域 $\mathcal{E}(\Phi_0)$ 的距离 $d_\tau^{[S]}$ 总是随着参数 τ 的增加而线性递增. 基于这一关系, 研究NDS外部输出之差 $d_\tau^{[T]}$ 与 $\tilde{\Phi}_k(\tau)$ 到不可辨识区域的距离 $d_\tau^{[S]}$ 之间的关系

可以转化为其在固定方向上相对 τ 的变化关系. 计算结果如图2(b)所示. 当 τ 较小时, $d_r^{[T]}$ 随着自变量 τ 的增加逐渐递增, τ 达到某个数值后反而逐渐减小.

另一方面, 考虑 $d_r^{[T]}$ 关于由(6)所定义的TFM之差的 $\mathcal{H}_\infty$ 范数 $d_r^{[F]}$ 的变化情况, 如图2(c)所示. 当 $d_r^{[F]}$ 较小时, $d_r^{[T]}$ 随着自变量 $d_r^{[F]}$ 的增加而递增. 结合2(b)和2(c)可知, NDS的SCM在不可辨识区域附近改变时其外部输出之差随着SCM到不可辨识区域距离的增加而增加. 需要指出的是, 样本 $\tilde{\Phi}_1$ 对应的曲线在图2(b)和2(c)中出现了对应于同一个外部输出之差 $d_r^{[T]} = 0.0010$ 的跳变点. 对此现象我们在本节后面具体分析.

当 $\tilde{\Phi}_k(\tau)$, $k = 1, 2, 3$, 距离不可辨识区域 $\mathcal{E}(\Phi_0)$ 较远时, 从图2(b)可以看出, $d_r^{[T]}$ 随着参数 τ 的增加逐渐减小. 考虑出现这种“波峰”是由于受到了系统稳定裕量的影响. 根据经典控制理论, NDS状态转移阵复特征根的虚部和实部的绝对值比值越大, 系统的阻尼系数就越小, 在阶跃状信号的激励下, 其输出振荡越厉害、过渡过程越长; 同时, 当实特征根离虚轴越近时, 系统在阶跃状信号激励下的过渡过程也越长. 令 $\max|\frac{Im}{Re}|$ 表示NDS状态转移阵复特征根的虚部和实部绝对值之比的最大值, $\min|\rho|$ 表示NDS状态转移阵实特征根的绝对值的最小值. 图2(d)和2(e)分别显示了两者关于参数 τ 的变化曲线. 其中, $\Sigma(\tilde{\Phi}_2(\tau))$ 的状态转移阵只有复特征根, 而 $\Sigma(\tilde{\Phi}_3(\tau))$ 的 $\max|\frac{Im}{Re}|$ 值几乎全为零.

结合图2(b), 2(d)可知, $\Sigma(\tilde{\Phi}_2(\tau))$ 的 $\max|\frac{Im}{Re}|$ 和 $d_r^{[T]}$ 几乎在相同 τ 值附近达到峰值. 同时, 结合图2(b), 2(e)可知, $\Sigma(\tilde{\Phi}_3(\tau))$ 的 $\min|\rho|$ 和 $d_r^{[T]}$ 也几乎在相同 τ 值附近达到极值. 这些结果表明, NDS在不同结构下的外部输出之差的确依赖于系统的稳定裕量. 针对这一现象, 图2(f)和2(g)分别显示了 $\Sigma(\tilde{\Phi}_2(\tau))$ 、 $\Sigma(\tilde{\Phi}_3(\tau))$ 的上述两个指标和对应的外部输出之差 $d_r^{[T]}$ 的关系. 从整体趋势看, 当 $\max|\frac{Im}{Re}|$ 逐渐增加或 $\min|\rho|$ 逐渐减小时, $d_r^{[T]}$ 都越来越大. 表明NDS距离不稳定区域越近, 其外部输出越容易被区分.

前面已经指出, 图2(b)和2(c)中出现了对应于同一个 $d_r^{[T]} = 0.0010$ 的跳变点. 在该点处 $d_r^{[F]}$ 取得最大值 $d_{max}^{[F]} = 4.9700 \times 10^2$, 远高于其他 τ 处的 $\mathcal{H}_\infty$ 范数值. 图2(h)给出了在该点处, $H(\lambda, \Phi_r^{[1]}) - H(\lambda, \Phi_0)$ 的奇异值 $\sigma(d_{max}^{[F]})$ 随角频率 ω 的变化曲线. 十分明显, 两个TFM之差的频率响应在低频段条件数较大, 导致NDS对某些方向上的输入数据相当敏感. 这也解释了图2(f)、2(g)以及图2(c)的蓝色曲线上出现的“锯齿”状跳变现象. 在某种程度上, 本实验中选取的两个相互独立的 m 序列作为输入信号并不十分理想.

综上所述, NDS在不同结构下的外部输出之差不仅依赖于其SCM Φ 到不可辨识区域的距离, 还取决于其到系统不稳定区域的距离. 此外, 考虑到多变量系统的响应本身具有方向性, 若某些结构变化导致NDS对外部输入信号比较敏感, 相应的外部输出也会发生较大改变. 因此在后续的辨识实验设计中, 选取在各个方向上分布均匀的测试信号可能更为合适.

5 总结

在每个子系统的外部输入到内部输出的TFM满足FNRR的前提下, 本文研究了对NDS的要求, 使

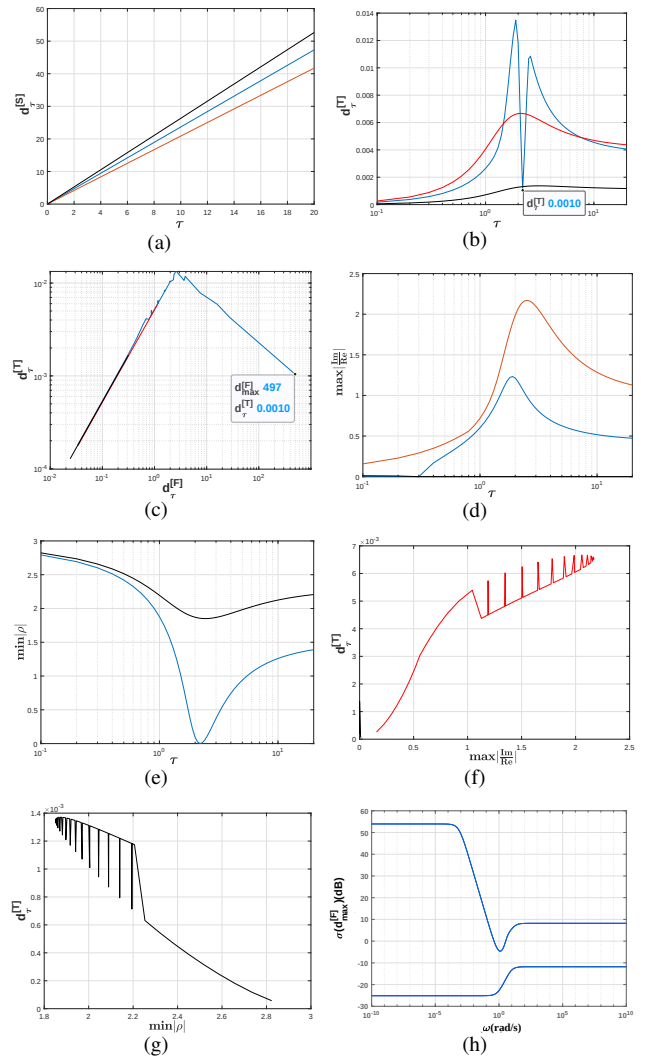


图 2: NDS $\Sigma(\Phi_0)$ 结构变化前后的外部输出之差在不可辨识区域附近和稳定区域附近的变化情况. 各图中蓝、红、黑色的曲线分别对应于 $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3$ 生成的样本. (a) SCM 样本到不可辨识区域的距离 $d_r^{[S]}$ 随 τ 的变化; (b) NDS 外部输出之差 $d_r^{[T]}$ 随 τ 的变化; (c) NDS 外部输出之差 $d_r^{[T]}$ 随 TFM 之差的 $\mathcal{H}_\infty$ 范数 $d_r^{[F]}$ 的变化; (d) 状态转移阵复数特征根的虚部和实部绝对值比值的最大值 $\max|\frac{Im}{Re}|$ 随 τ 的变化; (e) 状态转移阵实数特征根绝对值的最小值 $\min|\rho|$ 随 τ 的变化; (f) NDS 外部输出之差 $d_r^{[T]}$ 随状态转移阵复数特征根虚部和实部绝对值比值的最大值 $\max|\frac{Im}{Re}|$ 的变化; (g) NDS 外部输出之差 $d_r^{[T]}$ 随状态转移阵实数特征根绝对值的最小值 $\min|\rho|$ 的变化; (h) $d_{max}^{[F]}$ 所对应的 NDS 频率响应的奇异值的频率特性.

其SCM可以通过实验数据被估计出. 除了适定性以外, 对子系统动态以及子系统之间的连接关系没有任何其他的约束. 我们证明了在特定连接下, NDS的全局可辨识性可以转化为一个便于检验的代数判据. 该结构可辨识性条件被进一步推广到一些对NDS的SCM具有一定先验知识的情形. 借助于赋值拟阵的相关结论, 这些结果有望被进一步表示为基于图论的条件, 从而有效规避所涉及的Smith标准形的计算, 使结果更适用于大规模NDS的结构可辨识性判断.

仿真计算结果表明, NDS的外部输出之差在不可辨识区域附近随着SCM到不可辨识区域距离的增加而增加, 在不稳定区域附近随着NDS到不稳定区域距离

的减少而增加. 这可能意味着, NDS越趋向于不稳定则越利于结构辨识. 另外, 我们还观察到由于多变量系统的响应具有方向性, 而辨识对象对哪一特定方向的输入更为敏感通常是未知的, 因此应当选取在各方向上分布较均匀的信号作为测试信号. 这些发现为后续辨识实验的设计提供了一些重要启示.

附录

定理1的证明: 考虑定理1的逆命题. 基于引理2, 在特定SCM Φ_0 下的NDS $\Sigma(\Phi_0)$ 是全局不可辨识的, 当且仅当存在满足系统适定性的SCM $\Phi_* \neq \Phi_0$, 使得 $H(\lambda, \Phi_*) - H(\lambda, \Phi_0) \equiv 0$. 根据(6)中 $H(\lambda, \Phi)$ 的定义,

$$\begin{aligned} & H(\lambda, \Phi_*) - H(\lambda, \Phi_0) \\ &= G_{yv}(\lambda) \{ \Phi_* [I_{m_z} - G_{zv}(\lambda) \Phi_*]^{-1} - \\ & \quad [I_{m_v} - \Phi_0 G_{zv}(\lambda)]^{-1} \Phi_0 \} G_{zu}(\lambda) \\ &= G_{yv}(\lambda) [I_{m_v} - \Phi_0 G_{zv}(\lambda)]^{-1} \Delta_* \\ & \quad [I_{m_z} - G_{zv}(\lambda) \Phi_*]^{-1} G_{zu}(\lambda) \\ & \equiv 0 \end{aligned} \quad (a.1)$$

其中 $\Delta_* = \Phi_0 - \Phi_*$. 当TFM $G_{zu}(\lambda)$ 满足FNRR, (a.1)等价于 $G_{yv}(\lambda) \times [I_{m_v} - \Phi_0 G_{zv}(\lambda)]^{-1} \Delta_* \equiv 0$. 进一步地, 基于(7)中TFM $G_{yv}(\lambda, i)$ 的Smith-McMillan标准形可推得

$$V_{yv}^{[1]}(\lambda) [I_{m_v} - \Phi_0 G_{zv}(\lambda)]^{-1} \Delta_* \equiv 0 \quad (a.2)$$

其中 $V_{yv}^{[1]}(\lambda) = \text{diag}\{V_{yv}^{[1]}(\lambda, i)\}_{i=1}^N$. 设 $\Delta_* = [\delta_*^{[1]} \quad \delta_*^{[2]} \quad \dots \quad \delta_*^{[m_z]}]$, 其中 $\delta_*^{[j]} \in \mathcal{R}^{m_v}, j = 1, \dots, m_z$. 存在非零实数矩阵 Δ_* 使得方程(a.2)成立, 等价于其中至少有一个列向量 $\delta_*^{[\ell]}, \ell \in \{1, \dots, m_z\}$, 是有理分式矩阵 $V_{yv}^{[1]}(\lambda) [I_{m_v} - \Phi_0 \times G_{zv}(\lambda)]^{-1}$ 右零空间的一个非零元, 即 $V_{yv}^{[1]}(\lambda) [I_{m_v} - \Phi_0 G_{zv}(\lambda)]^{-1} \times \delta_*^{[\ell]} \equiv 0$. 根据关系式 $V_{yv}^{[1]}(\lambda) S_{yv}^{[2]}(\lambda) \equiv 0$ 可知, 对 $\delta_*^{[\ell]}$ 总存在 $\bar{\alpha}_{yv}$ 维无穷阶多项式列向量 $\bar{\alpha}(\lambda)$, 使 $[I_{m_v} - \Phi_0 G_{zv}(\lambda)]^{-1} \delta_*^{[\ell]} = S_{yv}^{[2]}(\lambda) \bar{\alpha}(\lambda)$ 成立. 等价地

$$\begin{aligned} \delta_*^{[\ell]} &= [I_{m_v} - \Phi_0 G_{zv}(\lambda)] S_{yv}^{[2]}(\lambda) \bar{\alpha}(\lambda) \\ &= [D_{zv}(\lambda) - \Phi_0 N_{zv}] D_{zv}^{-1}(\lambda) S_{yv}^{[2]}(\lambda) \bar{\alpha}(\lambda) \\ &= [D_{zv}(\lambda) - \Phi_0 N_{zv}] [R(\lambda) + D_{zv}^{-1}(\lambda) \bar{S}_{yv}^{[2]}(\lambda)] \bar{\alpha}(\lambda) \\ &= [D_{zv}(\lambda) - \Phi_0 N_{zv}] [R(\lambda) + Q(\lambda) \Omega^{-1}(\lambda)] \bar{\alpha}(\lambda) \\ &= [X(\lambda) - \Phi_0 Y(\lambda)] \Omega^{-1}(\lambda) \bar{\alpha}(\lambda) \end{aligned} \quad (a.3)$$

其中 $S_{yv}^{[2]}(\lambda) = \text{diag}\{S_{yv}^{[2]}(\lambda, i)\}_{i=1}^N$, 注意到 $D_{zv}^{-1}(\lambda) \bar{S}_{yv}^{[2]}(\lambda)$ 和 $Q(\lambda) \times \Omega^{-1}(\lambda)$ 分别是同一个严真有理分式矩阵的左MFD和右MFD, 因此第四个等号成立. 令 $\alpha(\lambda) = \Omega^{-1}(\lambda) \bar{\alpha}(\lambda)$, 显然 $\bar{\alpha}(\lambda)$ 和 $\alpha(\lambda)$ 之间存在双射关系, 换言之 $\bar{\alpha}(\lambda)$ 的存在性和 $\alpha(\lambda)$ 的存在性是等价的. 即方程(a.3)有解意味着方程(10)有解. 定理1得证.

定理2的证明: 考虑定理2的逆命题. 根据定理1, 若TFM $G_{zu}(\lambda)$ FNRR, NDS Σ 在特定SCM Φ_0 下结全局不可辨识, 等价于存在非零实向量 $\delta \in \mathcal{R}^{m_v}$ 满足方程(10). 将(11)的Smith标准型中的单模阵 $V_{\Phi_0}(\lambda)$ 分解为两个行块矩阵 $[V_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda) \quad V_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda)]^T$, 其中 $V_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda)$ 具有 r_{Φ_0} 行. 则方程(10)意味着

$$\begin{bmatrix} \text{diag}\{\mu_{\Phi_0}^{[j]}(\lambda)\}_{j=1}^{r_{\Phi_0}} V_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda) \alpha(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda) \\ T_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda) \end{bmatrix} \delta \quad (a.4)$$

以上方程实际上包含了两个约束. 首先验证对于任意实数向量 $\delta \in \mathcal{R}^{m_v}$, 方程 $\text{diag}\{\mu_{\Phi_0}^{[j]}(\lambda)\}_{j=1}^{r_{\Phi_0}} V_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda) \alpha(\lambda) = T_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda) \delta$ 是否有解. 定义 $S_{\Phi_0}(\lambda)$ 为 $V_{\Phi_0}(\lambda)$ 的逆矩阵且分解为两个列块矩阵, 即 $S_{\Phi_0}(\lambda) = V_{\Phi_0}^{-1}(\lambda) = [S_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda) \quad S_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda)]$, 其中 $S_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda)$ 具有 r_{Φ_0} 列. 根据定义, 关系式 $V_{\Phi_0}^{[1]} S_{\Phi_0}^{[1]} \equiv 0$ 及 $V_{\Phi_0}^{[1]} S_{\Phi_0}^{[2]} \equiv I$ 总成立. 换言之, 总是存在 $\hat{r}_{yv} - r_{\Phi_0}$ 维无穷阶多项式向量 $\xi(\lambda)$, 使得 $\alpha(\lambda) = S_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda) T_{\Phi_0}^{[1]}(\lambda) \delta + S_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda) \xi(\lambda)$ 满足方程(a.4)中的第一个约束.

其次, 讨论第二个等式约束 $T_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda) \delta \equiv 0$. 这意味着 δ 必须是有限维多项式矩阵 $T_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda)$ 右零空间中的一个非零元. 事实上, 这就等价于

矩阵 $\Phi_0 - \Phi$ 中至少有一个非零列向量是 $T_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda)$ 右零空间的元素. 根据矩阵 T 的定义

$$T_{\Phi_0}^{[2]}(\lambda) \delta = \left(\sum_{k=0}^p \lambda^k T_k^{[\Phi_0]} \right) \delta = ([1 \quad \lambda \cdots \lambda^p] T) \delta \equiv 0 \quad (a.5)$$

等价于 $T \delta = 0$. 因此, 存在非零实向量 δ 满足方程(10)等价于 T 必须非FCR. 反之则定理2得证.

参考文献

- [1] D. D. Siljak, Large-scale Dynamic Systems: Stability and Structure, North-Holland Books, New York, USA, 1978.
- [2] T. Zhou, K. Y. You and T. Li, Estimation and Control of Large Scale Networked Systems, Elsevier, Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2018.
- [3] Y. F. Huang, I. Tienda-Luna and Y.F. Wang, "Reverse engineering gene regulatory networks", IEEE Signal Processing Magazine, Vol.26, No.1, pp.76-97, 2009.
- [4] R. J. Prill, D. Marbach, J. Saez-Rodriguez, P. K. Sorger, L. G. Alexopoulos, X. W. Xue, N. D. Clarke, G. Altan-Bonnet and G. Stolovitzky, "Towards a rigorous assessment of systems biology models: the dream3 challenges", PLoS ONE, Vol.5, No.2, e9202, 2010.
- [5] J. Xiong and T. Zhou, "Structure identification for gene regulatory networks via linearization and robust state estimation", Automatica, Vol.50, pp.2765-2776, 2014.
- [6] P. M. J. Van den Hof, A. Dankers, P. S. C. Heuberger and X. Bombois, "Identification of dynamic models in complex networks with prediction error methods-basic methods for consistent module estimates", Automatica, Vol.49, No.10, pp.2294-3006, 2013.
- [7] T. Zhou and Y. Zhou, "Affine dependence of network observability/controllability on its subsystem parameters and connections", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, doi: 10.1109/TSMC.2020.3030765.
- [8] H. H. M. Weerts, P. M. J. Van den Hof and A. Dankers, "Identifiability of linear dynamic networks", Automatica, Vol.89, pp.247-258, 2018.
- [9] J. M. Hendrickx, M. Gevers and A. S. Bazanella, "Identifiability of dynamical networks with partial node measurements", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.64, No.6, pp.2240-2253, 2019.
- [10] H. J. Van Waarde, P. Tesi and M. K. Camlibel, "Necessary and sufficient topological conditions for identifiability of dynamical networks", IEEE Transactions on Automatic Control, DOI:10.1109/TAC.2019.2957345, 2019.
- [11] H. J. Van Waarde, P. Tesi and M. K. Camlibel, "Topology identification of heterogeneous networks of linear systems", Proceedings of the 58th Conference on Decision and Control, pp.5513-5518, Nice, France, 2019.
- [12] J. Goncalves and S. Warnick, "Necessary and sufficient conditions for dynamical structure reconstruction of LTI networks", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.53, No.7, pp.1670-1674, 2008.
- [13] D. Patil, P. Tesi and S. Trenn, "Indiscernible topological variations in DAE networks", Automatica, Vol.101, pp.280-289, 2019.
- [14] C. De Persis and P. Tesi, "Formulas for data-driven control: stabilization, optimality, and robustness", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 65, no. 3, pp. 909-924, March 2020, doi: 10.1109/TAC.2019.2959924.
- [15] K. M. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover, Robust and Optimal Control, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1996.
- [16] T. Kailath, Linear Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1980.
- [17] R. A. Horn and C. R. Johnson, Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1991.
- [18] T. Zhou, "Structure identifiability of an NDS with LFT parametrized subsystems", arXiv:2005.13429, 2020.
- [19] L. Ljung, System Identification: Theory for the User. 2nd ed., Prentice Hall PTR, 1999.
- [20] K. Murota, Matrices and Matroids for Systems Analysis. 1st ed., Springer Berlin Heidelberg, 2010.