



几类复杂系统控制问题

段志生

北京大学力学与工程科学系





内容介绍:

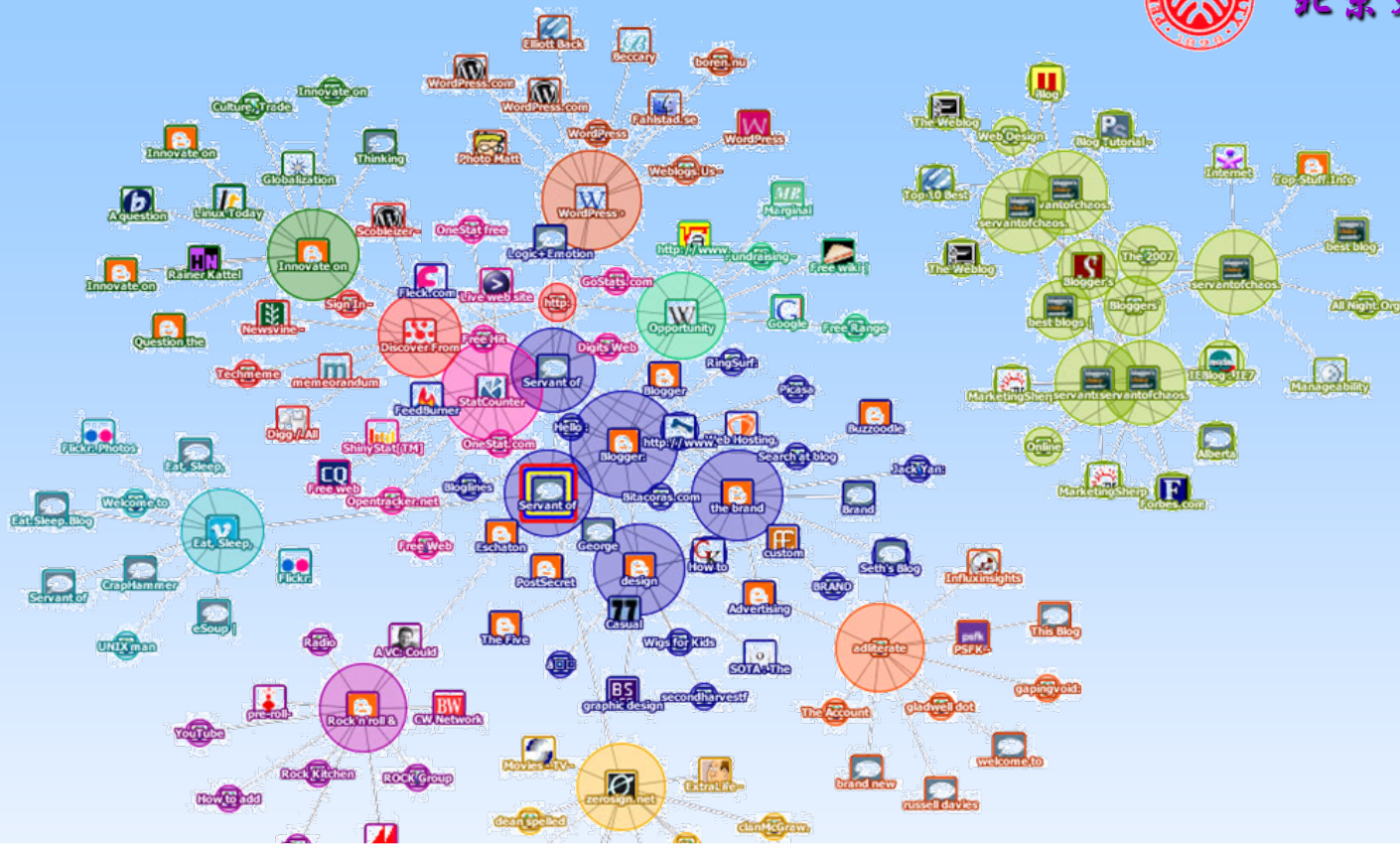
一. 大系统分散控制

二. 复杂网络同步控制

三. 多智能体一致性控制

四. 总结与展望



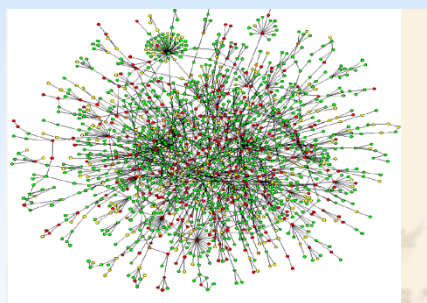


大系统：由多个简单系统连接而成

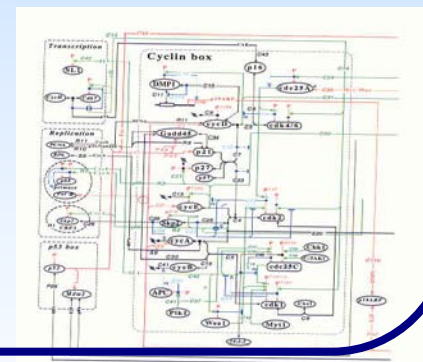
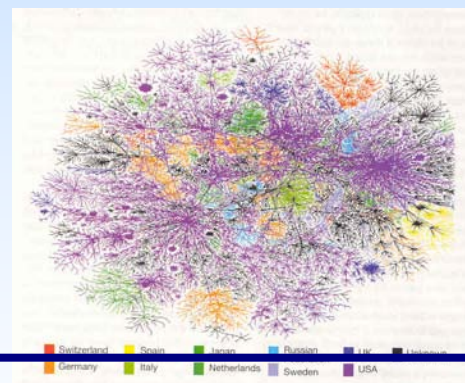
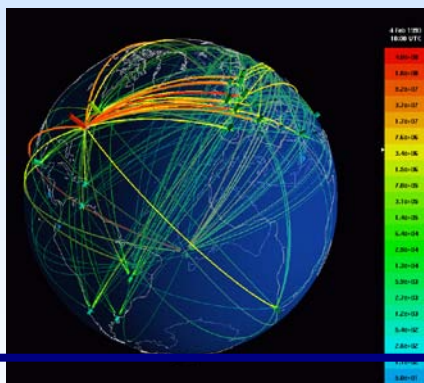


复杂系统=简单系统+耦合作用

复杂耦合系统广泛存在于自然界和人类社会中：

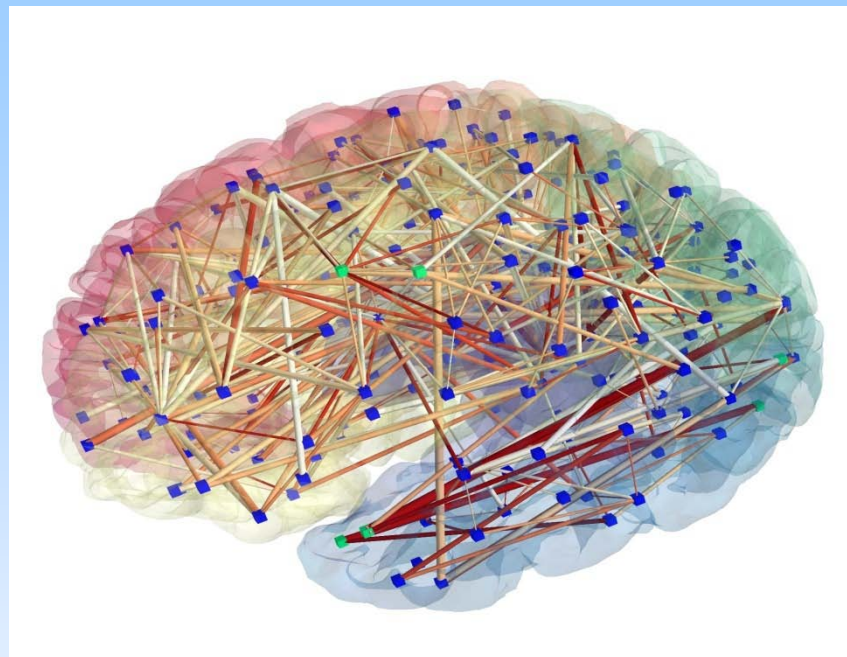


Illustrative graph of interactions among proteins
[H. Jeong, Korea Advanced Institute of Sci. and Tech.]





<http://www.depressionanxietydiet.com/gut-brain-connection-depression-anxiety/>



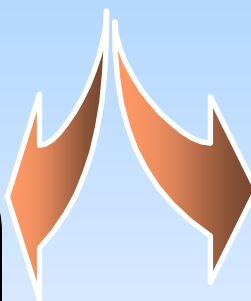
Brain Connectivity as Network Visualization:
<http://public.kitware.com/ImageVote/images/17/>

大脑神经元网络： 人脑大约由 10^{12} 个神经元组成，而其中的每个神经元又与约 $10^2 \sim 10^4$ 个其他神经元相连接，如此构成一个庞大而复杂的神经元网络。

复杂耦合系统当前的研究热点

复杂耦合系统的统计物理特性及演化机制

- 无标度特性、小世界效应
- 度相关性
-



复杂耦合系统的动力学行为

- 多智能体系统的协调控制
- 复杂网络同步控制
-



复杂耦合系统的动力学行为丰富多彩



演化机制

局部的、无序的相互影响



全局的、协调的行为



一、大系统分散控制

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N H_{ij}(x_j(t)) + B_i u_i,$$

↓
子系统i

↓
子系统的耦合与控制

- 大系统稳定性：依赖于对角块Lyapunov函数
- 耦合关系看做不确定性，子系统足够稳定
- 控制器只使用子系统信息





大系统曾经的课题：

- 子系统稳定性强度、连接性强度
- 大系统分解、集结，M矩阵方法
- 结构可控性（A，B），零元固定，非零元适当变化
- 固定模、结构固定模
- 分散控制器设计？？？

大系统特点：模型一般化；有好的代表性；
可操作性不强



1.2 线性系统

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j + B_i u_i,$$

- 分散状态反馈、分散动态反馈
- 分散动态反馈充分必要条件：无不稳定固定模
- 分散状态反馈迄今为止无充要条件，为什么？
- 过去的一些基本做法：对角占优！
- 本质难度？



1.3 两个子系统情形

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$
$$= Ax + Bu$$

➤ 集中状态反馈: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

➤ 分散状态反馈: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 x_1 \\ K_2 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

➤ 对角块本质难度?

➤ 状态反馈控制器的缺陷?



1.4 一个简单例子

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, K_1 = -(k_1 \quad k_2), K_2 = -(k_3 \quad k_4)$$

于是得

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ -k_1 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_3 & -k_4 \end{pmatrix}.$$



明显地有 $\det(sI - A_{cl}) = (s^2 + k_2s + k_1)(s^2 + k_4s + k_3) - \alpha\beta k_1k_3$.
对本例可得下面三个结论:

- (i) $\alpha\beta = 1$ 时, 0 是一个固定模.
- (ii) $\alpha\beta > 1$ 时, 对任意 $k_i > 0, i = 1, 2, 3, 4$, i.e., $A_1 + B_1K_1, A_2 + B_2K_2$ 稳定时, A_{cl} 不可能稳定.
- (iii) $\alpha\beta < 1$ 时, 两个子系统与关联系统可能同时稳定.

- 可以扩展为一个定理, 耦合项满足一定条件;
- 动态反馈也适用; 离散系统;
- 如何设计不稳定子系统镇定整个耦合系统? 难!



1.4 一个简单例子（与小增益定理区别）

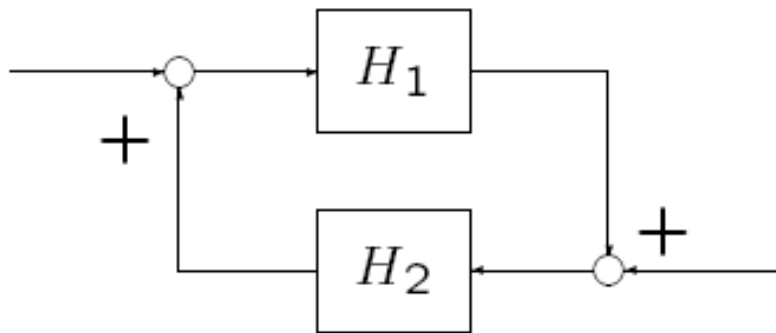


图1 反馈系统

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} + B_1 K_1 & B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_{22} + B_2 K_2 \end{pmatrix}$$

两点与小增益定理有本质区别：

- 有子系统不稳定；
- 大增益耦合



$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

where $A = I_N \otimes A_1 + C \otimes A_{12}$, and

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -(N-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \text{diag}(B_1, \dots, B_1), \quad u = \text{diag}(u_1, \dots, u_N).$$



$$A_{cl} = I_N \otimes A_1 + C \otimes A_{12} + \text{diag}(B_1 K_1, 0, \dots, 0). \quad (7)$$

Theorem 3. *The matrix A_{cl} in (7) is stable if, and only if, matrices $A_1 - A_{12}$ and*

$$A_d = \begin{pmatrix} A_1 - (N-1)A_{12} + B_1 K_1 & \sqrt{N-1}A_{12} \\ \sqrt{N-1}A_{12} & A_1 - A_{12} \end{pmatrix}$$

are stable.

➤只控制中心子系统，一定关联结构下必须有中心子系统不稳定，才能保证整个大系统稳定





1.6 飞行器多通道耦合姿态控制

基本
模型:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3, \\ \dot{x}_3 &= A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3,\end{aligned}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega_z \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_y \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \omega_x \end{pmatrix}, u_1 = \delta_z, u_2 = \delta_y, u_3 = \delta_x.$$

耦合因素： 状态之间的耦合； 输入之间的耦合；

三个层次的控制： 1、三个独立二阶子系统控制； 2、整个系统用分散控制； 3、全状态控制。

舵效分析、解耦性、H无穷控制方法（分散、耦合）。



BTT导弹

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= -c_1\omega_x - c_3\delta_x \\ \dot{\gamma} &= \omega_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 - e_1 & e_1a_4 - a_2 & \frac{(J_z - J_y)\omega_x}{57.3J_z} & \frac{e_1\omega_x}{57.3} \\ 1 & -a_4 & 0 & \frac{-\omega_x}{57.3} \\ \frac{(J_z - J_x)\omega_x}{57.3J_y} & \frac{-e_2\omega_x}{57.3} & -b_1 - e_2 & e_2b_4 - b_2 \\ 0 & \frac{\omega_x}{57.3} & 1 & -b_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -e_1a_5 - a_3 & 0 \\ -a_5 & 0 \\ 0 & e_2b_5 - b_3 \\ 0 & -b_5 \end{pmatrix}$$

$\omega_x = 0$ 时俯仰偏航耦合系统解耦为两个单通道系统:

不同的控制方法: 分散控制、全状态反馈、LQR、H无穷;
三个层次问题: 1、稳定性; 2、品质; 3、跟踪;
不稳定子系统的存在性、耦合因素更多地影响品质!

1.7 一个新算法

➤ 稳定性 – – Lyapunov不等式

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P < 0$$

取Lyapunov矩阵

$$P = (B, B^\perp) \begin{pmatrix} R_0^T (B^T B)^{-1} & (B^T B)^{-1} R_1 \\ R_1^T (B^T B)^{-1} & X \end{pmatrix} (B, B^\perp)^T.$$

Lyapunov不等式变为

$$PA + A^T P + BR_0^T K + K^T R_0 B^T + B^\perp R_1^T K + K^T R_1 B^{\perp T} < 0$$



●



结构约束控制器设计问题

- (1) 静态输出反馈控制器设计 $A+BKC$
- (2) 分散控制器设计，对角约束
- (3) 动态低阶控制，分散动态控制器
低阶控制器可以优于高阶控制器
- (4) 控制器参数约束，状态反馈与全阶动态控制器的缺陷
- (5) 稳定控制器，同时镇定
- (6) 控制器固定零元等

NP Hard问题！



二、复杂网络的同步控制

同步控制

局部同步

局部牵制同步、耦合时滞、噪声扰动：
主稳定函数分析法

全局同步

全局牵制控制，耦合时滞，噪声扰动，有限时间同步：
Lyapunov函数方法



复杂网络新课题:

- 稳定性——同步
- 与图论联系更紧密——统计物理
- 传播动力学——传染病、计算机病毒
- 可控性、鲁棒性新提法
- 搜索问题。。。

与大系统相比：模型特殊一些；
可操作性好很多！



复杂网络模型:

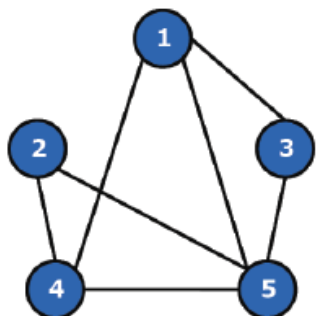
$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} [H(x_j(t)) - H(x_i(t))],$$

Coupling matrix

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

$$a_{ij} = a_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \leftrightarrow j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = -k_i$$



$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = 0$$

耦合矩阵 A 的特征值:

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \geq \lambda_N$$

同步状态: $\dot{s}(t) = f(s(t))$

利用主稳定函数法:

系统能够实现同步



同步化区域



$$c\lambda_k \in S, \quad k = 2, 3, \dots, N.$$

一般情况，人们很难解析地分析网络的同步化区域。这里，我们将主要分析同步状态为单个系统平衡点的情形。

当同步状态为单个系统平衡点时，同步化区域即为下面系统对于参数 α 的稳定化区域。

$$\dot{\omega} = [F + \alpha H] \omega$$

其中， $F = Df(s(t))$, $H = DH(s(t))$.

Z. Duan, G. Chen, and L. Huang, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 54, no. 4, pp. 845-849, 2009.



利用多项式稳定理论，我们能够得到下面的定理：

Theorem 1: For any natural number n , there are matrices F and H of order $2(n - 1)$ such that $F + \alpha H$ has n disconnected stable regions with respect to parameter α .

通过对网络同步化区域的细致分析，发现一些网络存在着不连通的同步化区域。上述节论表明，即使对于给定拓扑结构的网络，逐步调整其耦合强度可能使网络的同步行为呈现出间歇特性。

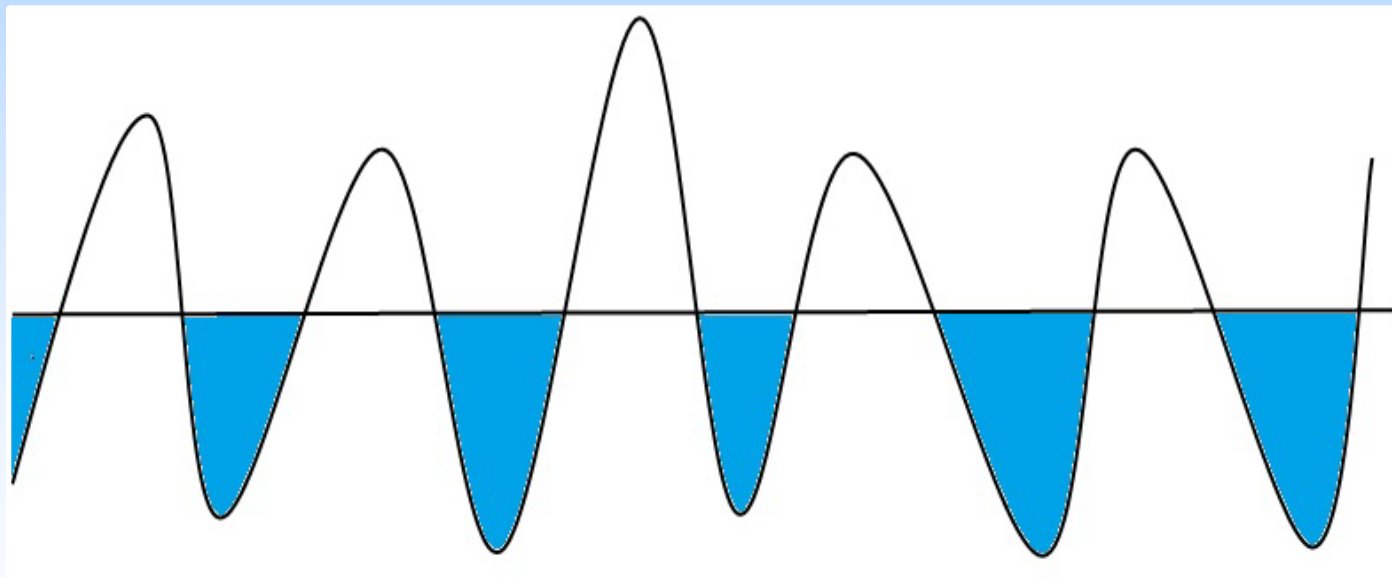


定理 1 中，假设矩阵 F 和 H 可以自由选取；对于给定的复杂网络，我们只能够设计 H ，此时我们可以得到下面的结论：

Theorem 2: For any given real stable matrix F of order n , suppose $\det(sI - F) = s^n + \gamma_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \gamma_1 s + \gamma_0$, and every eigenvalue of F corresponds to only one Jordan form. If there is a scalar $\beta_0 \neq 0$ such that $p(s) = s^n + \gamma_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \gamma_1 s + \gamma_0 - \beta_0$ is stable and $p(s)$ has n_i pairs of complex conjugate eigenvalues, then there exists a real matrix H such that $F + \alpha H$ has $[n - n_i/2] + 1$ disconnected stable regions with respect to parameter α .



证明了任意 n 次间歇同步网络的存在性。



网络的可能含有不连通同步化区域，耦合强度变化可使网络出现间歇同步行为。

对于同步实现而言，并不是越大的耦合强度越好。特征值比也不一定能代表同步能力！

什么情况下，耦合强度变化不会产生间歇同步行为？

该问题跟矩阵束稳定性区域的凸性紧密相关。



2.2 复杂网络pinning控制

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j(t) - c \varepsilon_i \Gamma (x_i(t) - s(t)), \quad i = k+1, k+2, \dots, N,$$

控制代价:

$$CF = c \sum_{i=1}^N \varepsilon_i.$$

- 控制多少节点?
- 控制哪些节点? 大节点? 小节点?
- 控制品质指标?



三、多智能体系统一致性控制

一阶多智能体系统:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) [x_j(t) - x_i(t)]$$

二阶多智能体系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \alpha \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}(t) (x_j(t) - x_i(t)) + \beta \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}(t) (v_j(t) - v_i(t)),\end{aligned}$$

高阶多智能体系统: ...

多智能体系统实现一致性，即系统中所有节点状态趋于相同。通常，一致性均是指对所有的初始状态，即全局一致性。

3.1 一般高阶线性多智能体

Agent:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= Ax_i + Bu_i, \\ y_i &= Cx_i, \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

观测器协议:

$$\begin{aligned}\dot{v}_i &= (A + BK)v_i + cV \left(\sum_{j=1}^N l_{ij} C(v_i - v_j) - \sum_{j=1}^N l_{ij} (y_i - y_j) \right), \\ u_i &= Kv_i, \quad i = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

状态反馈协议:

$$u_i = c \sum_{j=1}^N a_{ij} K(x_j - x_i),$$



3.2 多智能体系统看作复杂网络

$$\dot{\xi}_i = F\xi_i + c \sum_{j=1} l_{ij} H \xi_j, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\text{where } \xi_i = \begin{bmatrix} x_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} A & BK \\ 0 & A + BK \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -VC & VC \end{bmatrix}.$$

- 借鉴复杂网络同步，可以提出多智能体一致性区域的概念，体现网络的作用！
- H无穷品质区域，全局一致性区域等
- 鲁棒一致性、离散系统



其他：二阶多智能体有限时间分布协调控制

模型

$$\dot{x}_i = v_i$$

$$\dot{v}_i = f_i(x_i, v_i, t) + u_i + \omega_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\dot{x}_N = v_N, \quad \dot{v}_N = f_N(x_N, v_N, t).$$

假设：非线性动态误差有界，外部扰动有界，即：

$$\|f_i(x_i, v_i, t) - f_N(x_N, v_N, t)\|_\infty \leq c < \infty, \quad \|\omega_i\|_\infty \leq d < \infty.$$

- 分布跟踪协议的设计？
- 收敛时间的估计？
- 更实际的问题？



其他：二阶多智能体有限时间分布协调控制

➤ 协议的设计： $y_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j)$

$$\dot{\xi}_i = \eta_i - k_3 \text{sig}(\xi_i - y_i)^{\frac{1}{2}},$$

$$\dot{\eta}_i = -k_4 \text{sgn}(\xi_i - y_i),$$

$$u_i = -k_1 \text{sgn}(\xi_i) - k_2 \text{sgn}(\eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

- a) 不要求相对速度信息的通讯；
- b) 有限时间完成目标；



其他：二阶多智能体有限时间分布协调控制

➤收敛时间的估计：

$$V_1 = \left[k_1 \|e_x\|_1 + \frac{1}{2} e_v^T (L_1^{-1} \otimes I) e_v \right]^{\frac{3}{2}} + \theta e_x^T (L_1^{-1} \otimes I) e_v$$

$$V_2 = \vartheta^T P \vartheta \quad \vartheta = (\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\delta_x)^T, \delta_v^T)^T$$

$$A^T P + PA + [2Dn(c+d+k_1+k_2)]^2 C^T C + PBB^T P = -Q,$$

$$T_1 = \frac{3}{\gamma} V_1^{\frac{1}{3}}(e_x(0), e_v(0)),$$

$$T_2 = 2 \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(Q) \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P)} V_2^{\frac{1}{2}}(\vartheta_0),$$

$$A = \begin{bmatrix} -1/2k_3 & 1/2 \\ -k_4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) 理论上给出收敛时间的估计；
- b) 总的收敛时间小于 T : $T = T_1 + T_2$.



其他：二阶多智能体有限时间分布协调控制

➤ 非线性相对卫星轨道方程的编队

a) 动力学:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + C_i \dot{\mathbf{r}}_i + D_i(r_i) \mathbf{r}_i + \mathbf{n}_i(r_i, R_0) = \mathbf{U}_i,$$

b) 编队协议:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= \eta_i - k_3 \text{sig}(\xi_i - y_i)^{\frac{1}{2}}, \quad y_i = \sum_{j=1}^N [(r_i - r_j) - (h_i - h_j)] \\ \dot{\eta}_i &= -k_4 \text{sgn}(\xi_i - y_i), \\ u_i &= -k_1 \text{sgn}(\xi_i) - k_2 \text{sgn}(\eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1,\end{aligned}$$



其他：二阶多智能体有限时间分布协调控制

➤非线性相对卫星轨道方程的编队

c) 仿真结果：

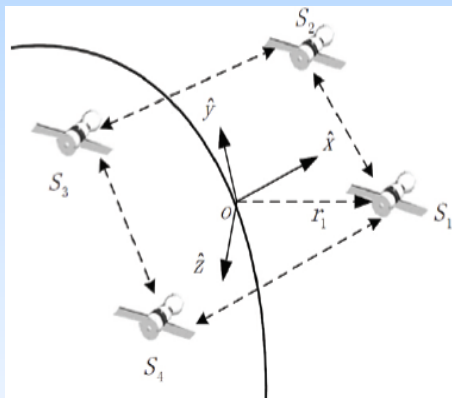


图 4.6 航天器有限时间编队飞行网络拓扑图

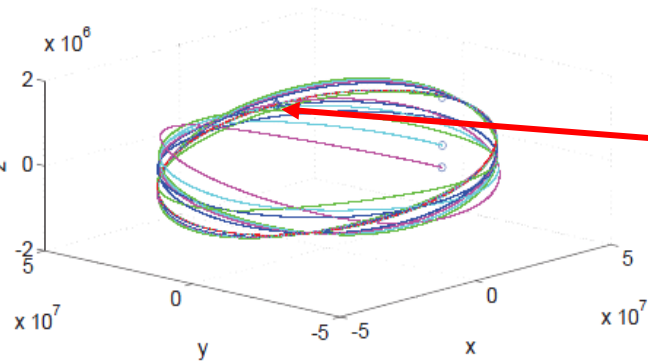
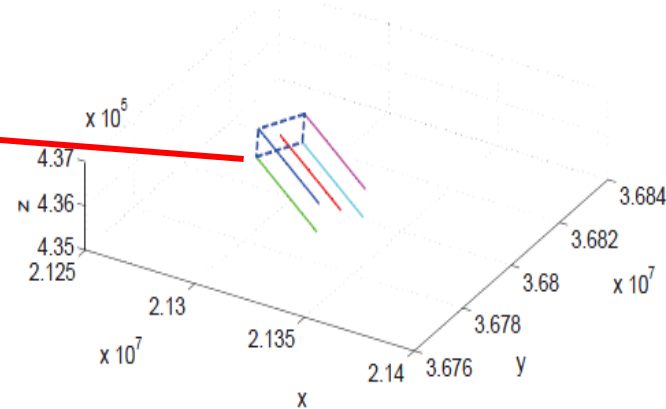


图 4.9 卫星编队全程轨迹图



实际仿真时间：100小时；
理论估计时间：大约280小时。

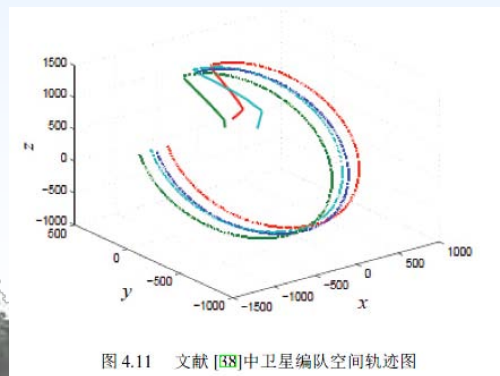


图 4.11 文献 [38] 中卫星编队空间轨迹图

其他：二阶多智能体有限时间分布协调控制

➤推广：刚体系统分布式饱和跟踪

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + G(q_i) = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\dot{\xi}_i = \eta_i - c_1 \text{sig}(\xi_i - \zeta_i)^{\frac{1}{2}},$$

$$\dot{\eta}_i = -c_2 \text{sgn}(\xi_i - \zeta_i),$$

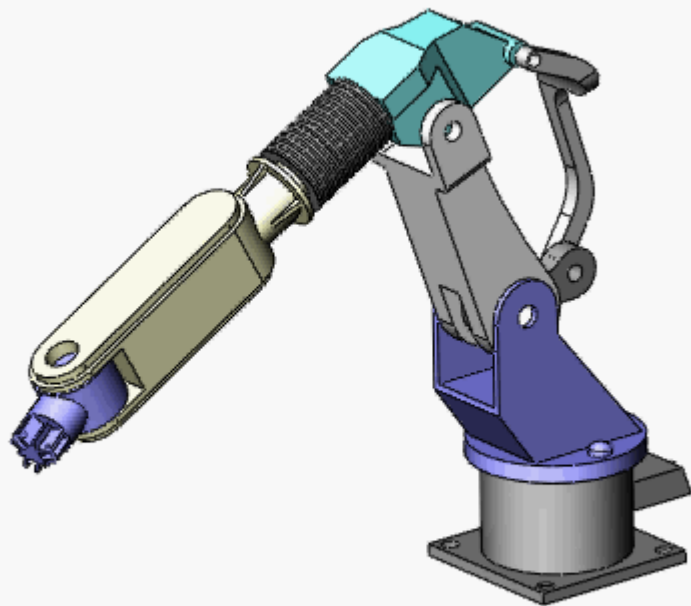
$$\tau_i = G(q_i) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} \{ \tanh[\text{sig}(\xi_j)^{\alpha_1}] + \tanh[\text{sig}(\eta_j)^{\alpha_2}] \},$$

➤推广：无领导者的一致性问题的

无领导者的二阶非线性一致性问题
最近有一定进展
(难点：分析证明、一致性状态)

其他：基于事件触发的多Euler-Lagrange系统同步研究

二阶机械臂系统



优点：(1) 可以充分利用有限的通信带宽进行信息传输；(2) 可以有效地减少控制器更新。

其他：二阶多智能体系统基于采样位置信息一致性研究

优点： 不需要测量任何速度信息
不需要设计滤波器或者观测器
不需要实时的位置信息
能得到采样周期的可容许区间
能给出如何选择耦合增益等参数



复杂网络 VS 多智能体系统

复杂网络与多智能体系统

相同点:

- 典型的复杂耦合系统模型
- 节点动力学与耦合关系决定整体动力学行为
- 涌现现象: 同步行为、一致性现象



不同点:

- 多智能体系统节点动力学模型简单, 但是通信拓扑通常复杂一些
- 复杂网络内关联矩阵固定, 多智能体可设计其通信协议 (分布式控制器)
- 典型的复杂网络规模巨大; 多智能体系统规模较小

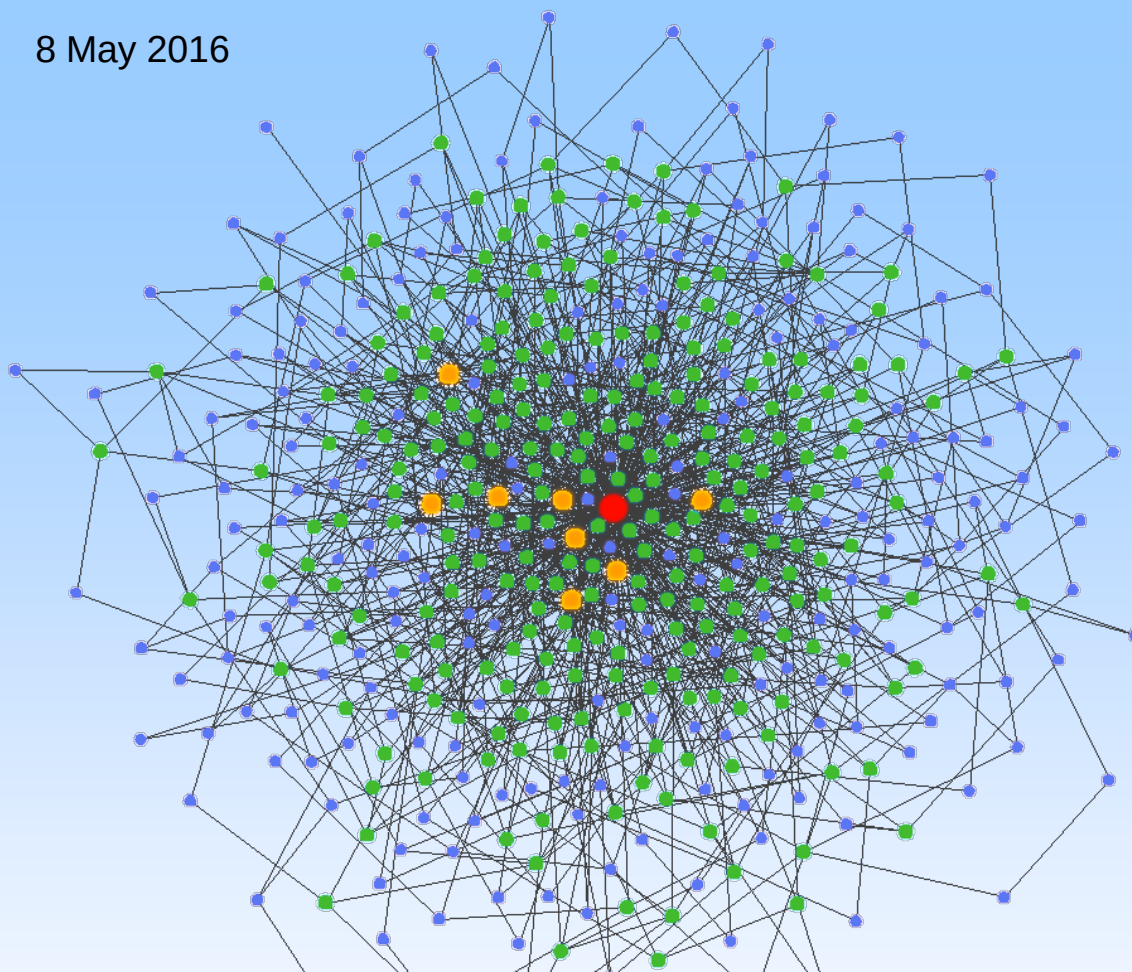
三类控制问题（零平衡点）

分散控制:
$$A_{cl} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 K_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 + B_2 K_2 \end{pmatrix}$$

牵制控制:
$$A_{cl} = \begin{pmatrix} A_1 + ca_{11}H + c\varepsilon H & ca_{12}H \\ ca_{21}H & A_1 + ca_{22}H \end{pmatrix}$$

一致性控制:
$$A_{cl} = \begin{pmatrix} A_1 + ca_{11}BK & ca_{12}BK \\ ca_{21}BK & A_1 + ca_{22}BK \end{pmatrix}$$





四. 总结与展望





四、总结与展望：

- 复杂性：复杂蕴于简单。
- 大系统理论的继承与发展？
- 复杂网络同步、一致性、有向、无向。
- 理论与应用的结合，飞行器编队！
- 神经元网络中的间歇性！
- 导弹拦截、多对多博弈！





谢谢！
请指正！

