



不确定非线性系统 预设性能控制

刘允刚

2016-5-7



1

非线性控制常见不足

2

预设性能非线性控制

3

预设收敛速度控制设计

4

预设暂态性能控制设计

□ 暂态特性方面

- ▶ 暂态特性未定量描述
- ▶ 最大超调量未知或不可调控

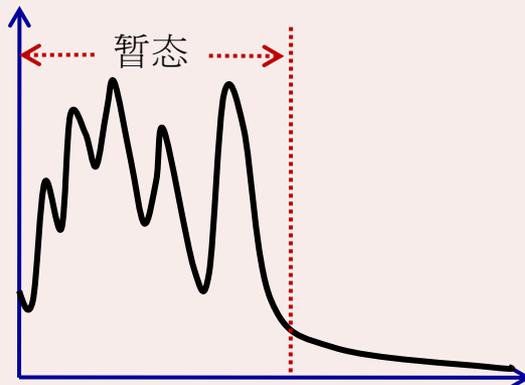


图1. 自适应渐近镇定系统

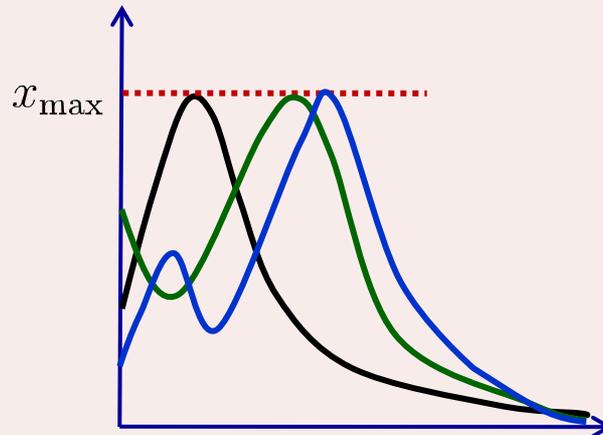


图2. 自适应渐近镇定系统

□ 快速性方面

- ▶ 收敛性未数量刻画
- ▶ 收敛速度未知或不可调控
- ▶ 到达时间未知或不可调控

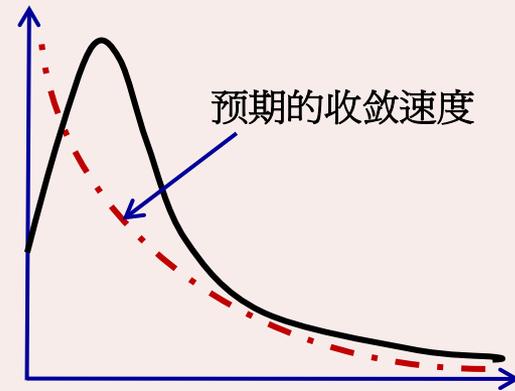


图1. 自适应渐近镇定系统

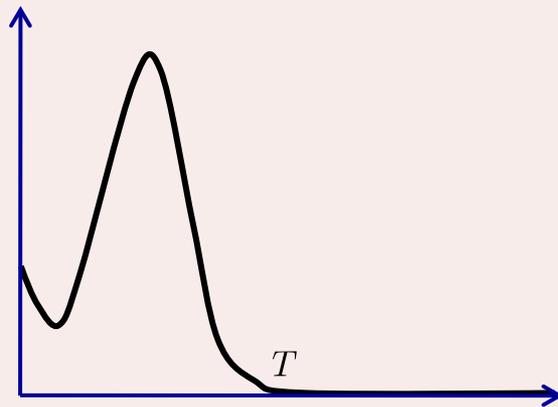


图3. 有限时间控制系统

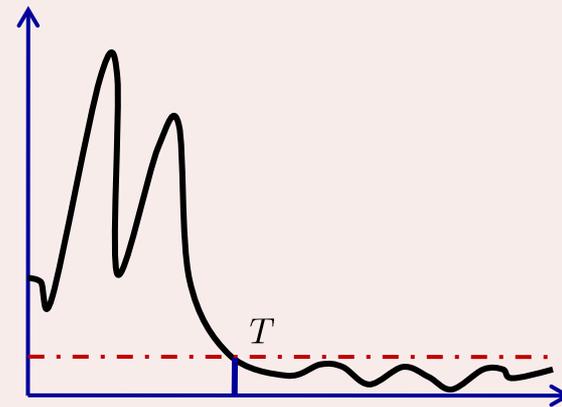


图2. 跟踪控制系统

□ 例子

例1: $\dot{x} = u + \theta x^2$, 使得 x 全局收敛的自适应控制:
$$u = -x - \hat{\theta} x^2, \quad \dot{\hat{\theta}} = x^2.$$

例2: $\dot{x} = u + \theta$, 使得 x 全局指数收敛的自适应控制:
$$u = -x - \hat{\theta}, \quad \dot{\hat{\theta}} = x.$$

例1: 最大超调、收敛速度、到达时间不能定量刻画，更不能预先设定。

例2: 尽管指数收敛，但最大超调和到达时间不能定量刻画，也不能事先设定。

□ 实际对控制性能的要求

▶ 暂态特性良好，超调不能很大

化学反应过程中化合物混合浓度过大会导致爆炸

飞机爬升过程中机翼迎角过大会导致失速

▶ 快速到达稳态，收敛速度要快

太阳能发电系统最大功率点快速跟踪

▶ 过渡过程平稳

蒸气养护砗系统中，升降温速度要适当





1

非线性控制常见不足

2

预设性能非线性控制

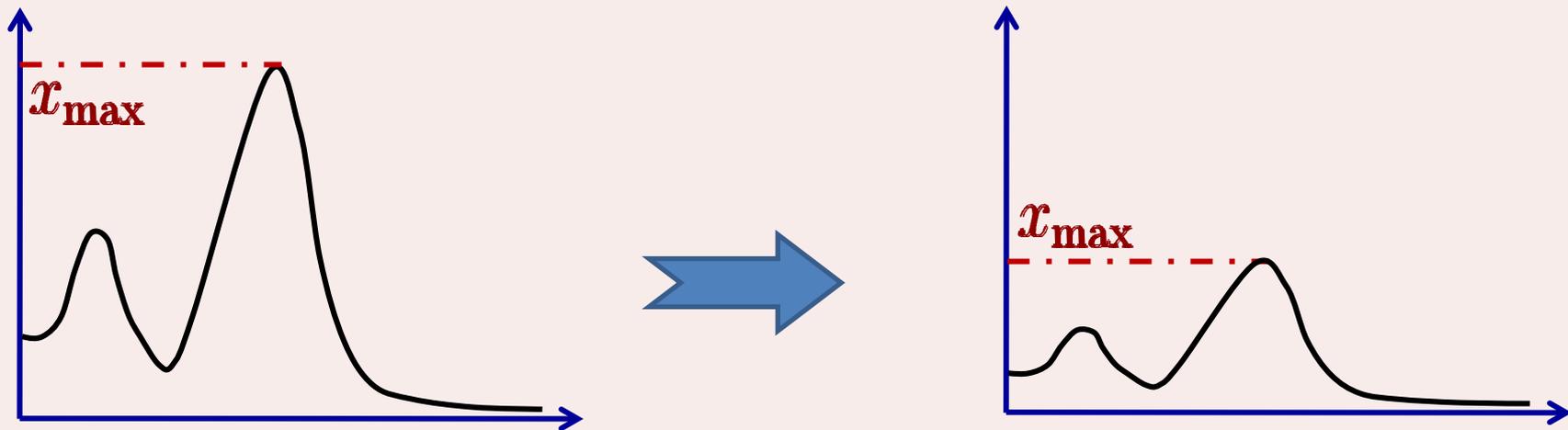
3

预设收敛速度控制设计

4

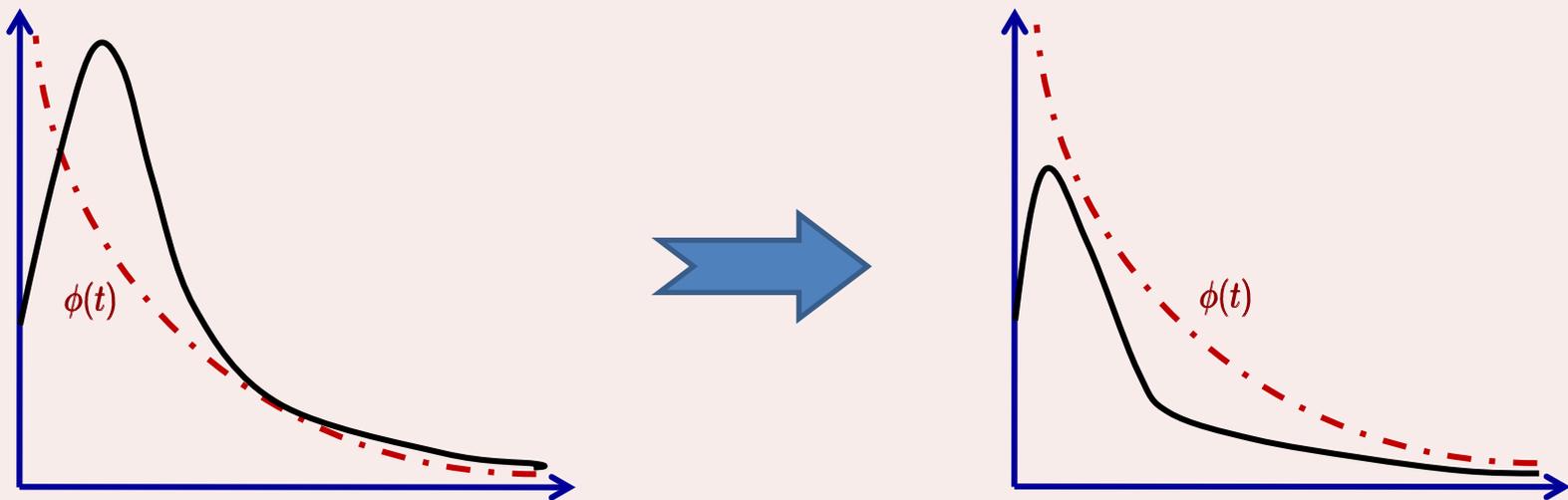
预设暂态性能控制设计

□ 预设性能：可控的暂态行为



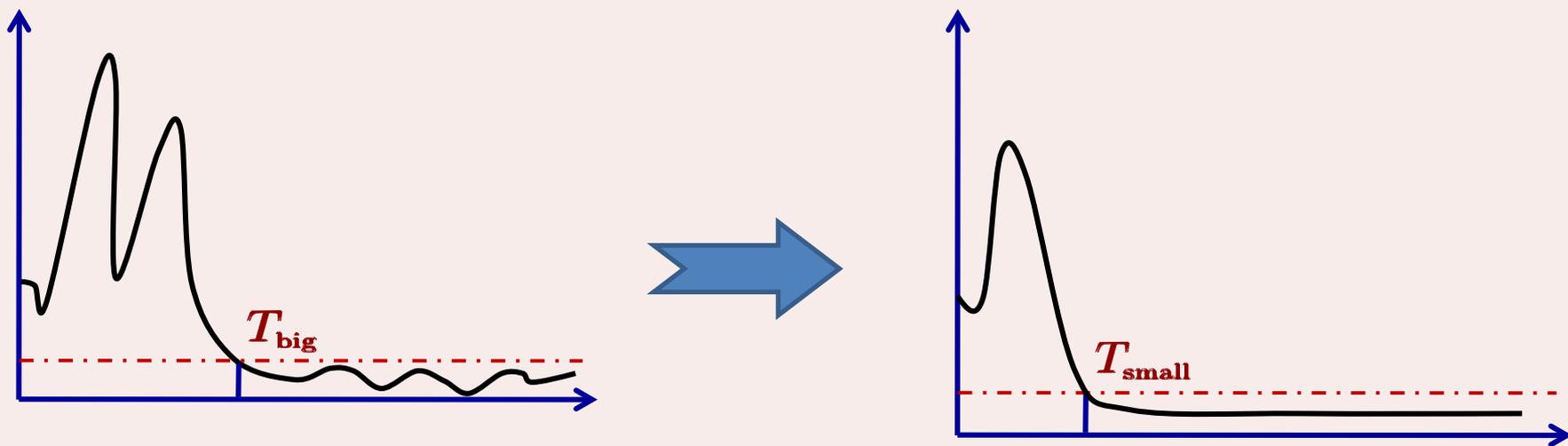
最大超调量减小

□ 预设性能：设定的收敛速度



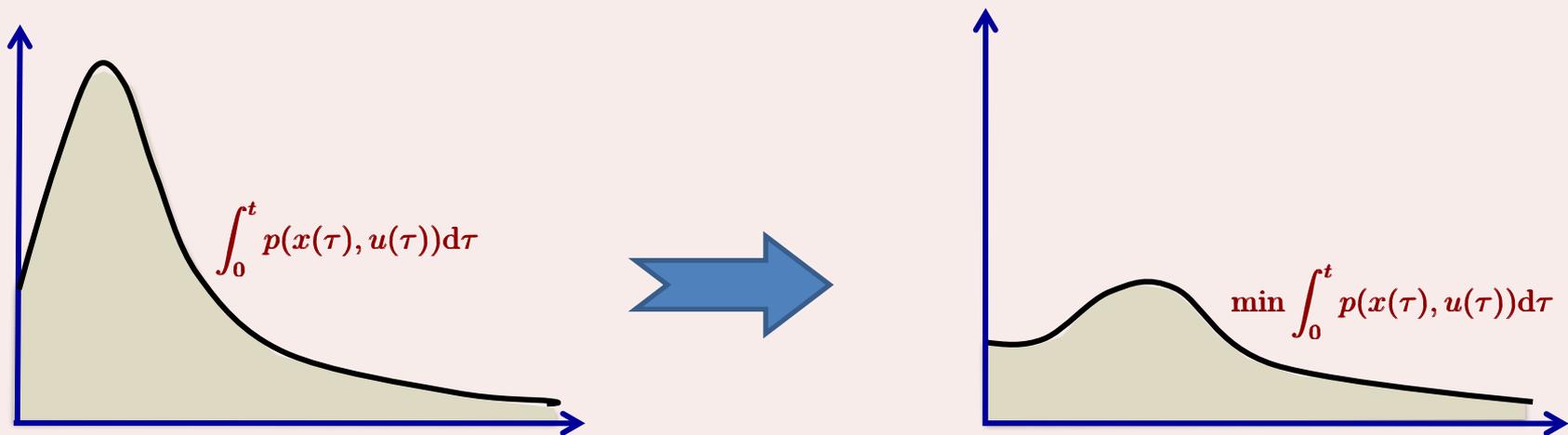
具有设定的收敛速度 $\phi(t)$

□ 预设性能：更快到达好的稳态



更快到达好的稳态

□ 预设性能：最优性能指标



最优性能指标控制

$$\min \int_0^{+\infty} p(x(t), u(t)) dt$$

□ 典型控制设计方法

▶ 不连续反馈控制策略

例：一维系统 $\dot{x} = u + \theta x^2$ ，
其中 θ 未知。

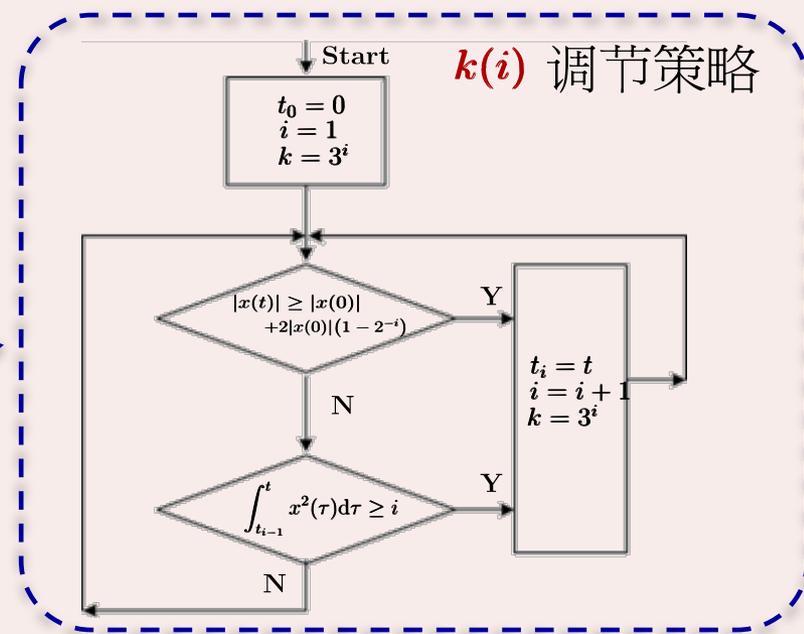
基于逻辑的不连续控制器：

$$u = -k(i)x$$

使得闭环系统：

最大超调量 $\leq 2|x(0)|$ ，

指数速度收敛。



□ 典型控制设计方法

▶ Funnel策略-时变方法

例：一维系统 $\dot{x} = u + \theta x^2$ ，
其中 θ 未知。

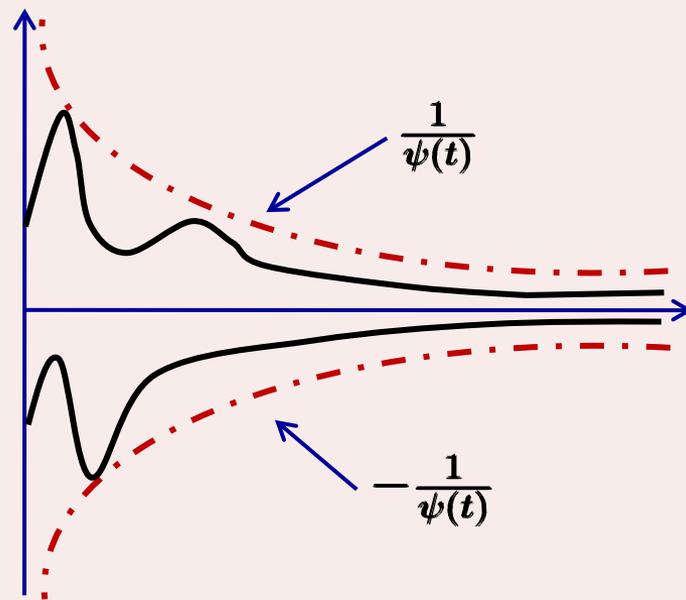
设计连续时变反馈控制器：

$$u = -\frac{x}{1 - (\psi(t)x)^2}$$

通过事先设定 $\psi(t)$ ，可实现

最大超调量 = $|x(0)|$ ，

预设收敛速度 $\frac{1}{\psi(t)}$ 。



□ 典型控制设计方法

▶ 自适应动态规划

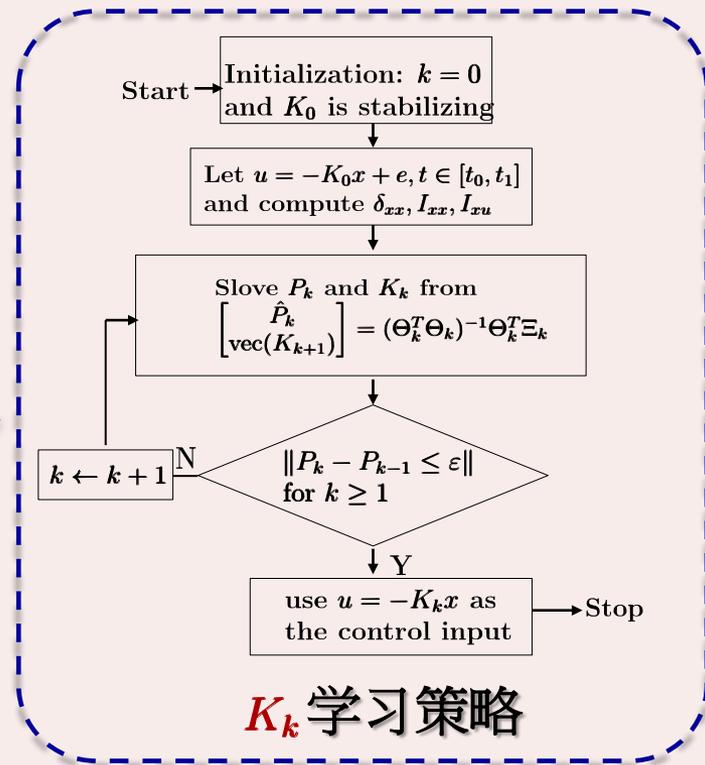
例：一维系统 $\dot{x} = u + \theta x$ ，
其中 θ 未知。

假设 $u = -K_0 x$ 使得系统渐近稳定
则基于在线学习的控制器：

$$u_k = -K_k x$$

使得闭环系统渐近稳定，特别是
 u_∞ 使得性能指标最优

$$\min \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$$



1

非线性控制常见不足

2

预设性能非线性控制

3

预设收敛速度控制设计

4

预设暂态性能控制设计

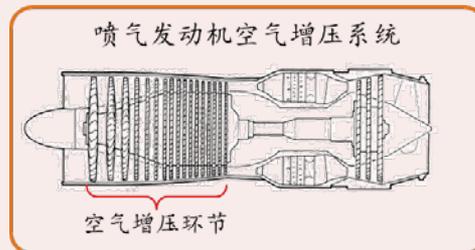
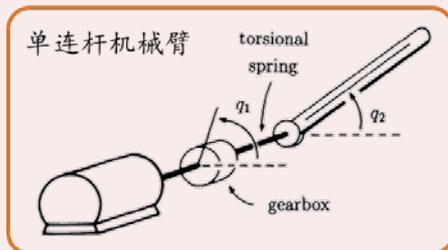
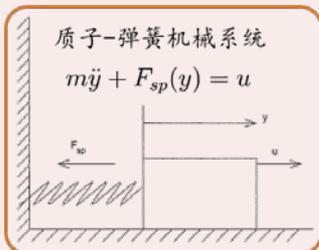
□ 不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(t, x)x_{i+1} + f_i(t, x, u), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = g_n(t, x)u + f_n(t, x, u). \end{cases} \quad (1)$$

► (1)是得到广泛研究的“严格反馈非线性系统”更一般化

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \phi_i(x_{[i]}), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u + \phi_n(x). \end{cases}$$

► (1)可用于建模许多实际系统



□ 系统(1)的一般性和概括性

▶ 控制方向是未知的

这体现在 $g_i(t, \mathbf{x})$'s 的正负未知性上。

只有施加适当的补偿(Nussbaum增益法或逻辑切换法)，才能设计出期望的反馈控制器。

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(t, \mathbf{x})x_{i+1} + f_i(t, \mathbf{x}, u), \\ \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = g_n(t, \mathbf{x})u + f_n(t, \mathbf{x}, u). \end{cases} \quad (1)$$

□ 系统(1)的一般性和概括性

▶ 不确定性和非线性更为本质

- ① 特定的结构形式：仿射结构、类下三角结构。
- ② 非参数化的不确定性和非线性：主要体现在下式中的 $\bar{g}_i(x_{[i]})$'s 和 $\bar{f}_i(x_{[i]})$'s 的未知性中：

$$\theta_g \underline{g}_i(x_{[i]}) \leq |g_i(t, x)| \leq \bar{g}_i(x_{[i]}),$$
$$|f_i(t, x, u)| \leq (1 + |x_{i+1}|^{q_i}) \bar{f}_i(x_{[i]}),$$

其中常数 θ_g 和 q_i 's 也是未知的。

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(t, x)x_{i+1} + f_i(t, x, u), \\ \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = g_n(t, x)u + f_n(t, x, u). \end{cases} \quad (1)$$

□ 镇定控制目标

基于Funnel策略，设计状态反馈控制器 $u(t, x)$ ，使得对任意初值，闭环系统的解以预设速度 $\frac{1}{\psi(t)}$ 收敛到零，即 $\sup_{t \geq t_0} \psi(t) \|x(t)\| < +\infty$ 。

为确保分析与设计的可行性，要求 $\psi(t)$ 满足：

- ① $\psi(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上局部绝对连续，
- ② $\psi(t_0) = 0$ 且 $\psi(t) > 0, \forall t > t_0$ ，
- ③ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = +\infty$ ，
- ④ 存在 $c > 0$ ，使得 $\dot{\psi}(t) \leq c(1 + \psi(t))$ 。

□ 反馈控制器表达式

控制器表达式： $u = \alpha_n(x, r_n, z_n)$,

其使得闭环系统状态满足 $\sup_{t \geq t_0} \psi(t) \|x(t)\| < +\infty$ 。

$\alpha_n(\cdot)$ 由下面迭代过程产生 (从1到 n 且初始设定 $\alpha_0 = 0$) :

$$\begin{cases} z_i = x_i - \alpha_{i-1}(x_{[i-1]}, r_{i-1}, z_{i-1}), \\ r_i := r_i(t, z_i) = \frac{1}{1 - (\psi(t)z_i)^2}, \\ \alpha_i(x_{[i]}, r_i, z_i) = \frac{k_i}{g_i(x_{[i]})} N(r_i) z_i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \limsup_{s \rightarrow +\infty} N(s) = +\infty, \\ \liminf_{s \rightarrow +\infty} N(s) = -\infty. \end{cases}$$

补偿未知控制方向

补偿非参数不确定性，
确保预设性能

□ 例子

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(t, x)x_2 + f_1(t, x, u), \\ \dot{x}_2 = g_2(t, x)u + f_2(t, x, u). \end{cases}$$

对 $g_i(\cdot)$'s, 假设: $\underline{g}_1(x_1) = 1$, $\underline{g}_2(x_{[2]}) = 1 + x_2^2$ 。

令 $t_0 = 0$ 且 $\psi(t) = t$ 。根据上页PPT, 控制器形式如下:

$$\begin{cases} u = \frac{2}{1+x_2^2} r_2 \cos(\pi r_2) z_2, \\ \begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = x_2 - z_1 r_1 \cos(\pi r_1), \end{cases} \\ r_i = \frac{1}{1-(tz_i)^2}, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

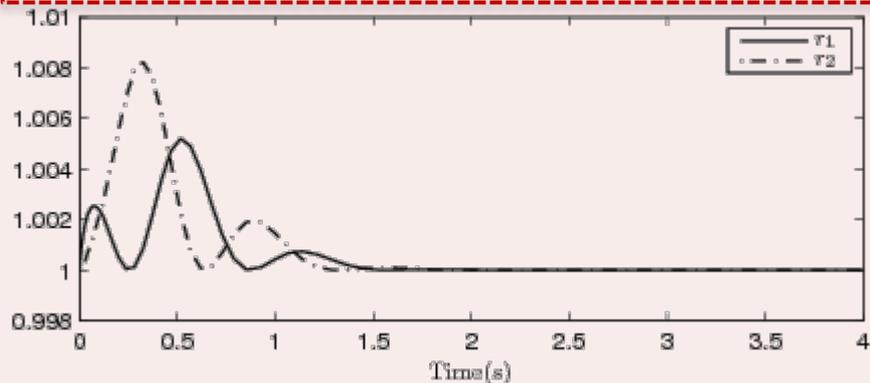
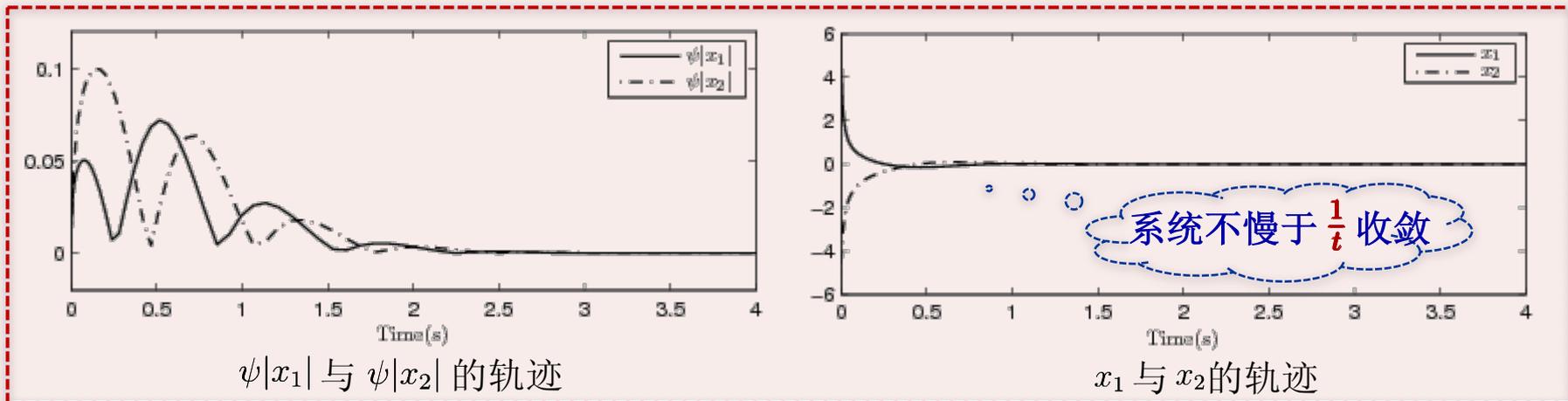
预设收敛速度控制设计



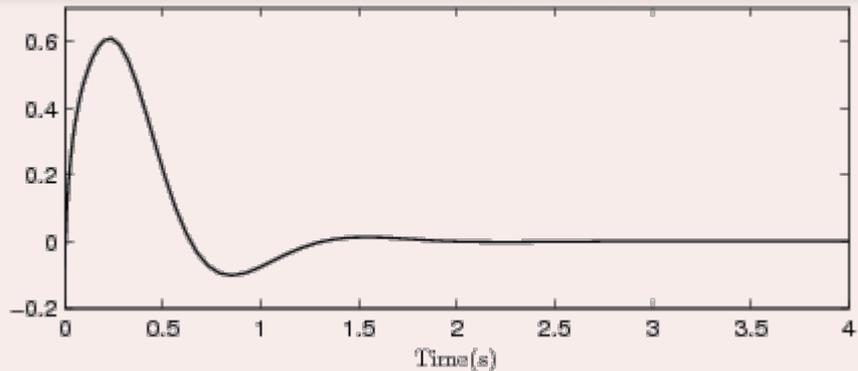
□ 例子

$$g_1(t, x) = 5(x_1^2 + 1), \quad g_2(t, x) = x_2^4 + 3, \quad f_1(t, x, u) = x_1^3 \sin x_2,$$

$$f_2(t, x, u) = 5(x_1^2 + x_2^2), \quad x(0) = [6, -5]$$



r_1 与 r_2 的轨迹



u 的轨迹

1

非线性控制常见不足

2

预设性能非线性控制

3

预设收敛速度控制设计

4

预设暂态性能控制设计

□ 不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(t, x)x_{i+1}^{p_i} + f_i(t, x, u), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = g_n(t, x)u^{p_n} + f_n(t, x, u) \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2)$$

- ▶ (2)是更广泛、更一般化的一类不确定非线性系统

$$\begin{array}{l} \text{高阶型} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i} + \phi_i(x_{[i]}), \\ i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u^{p_n} + \phi_n(x). \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{严格反馈型} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = x_{i+1} + \phi_i(x_{[i]}), \\ i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u + \phi_n(x). \end{array} \right. \end{array}$$

- ▶ (2)在原点处线性化不可控、不可观，更难实现控制

□ 系统(2)的一般性和概括性

▶ 控制方向是未知的

这体现在 $g_i(t, x)$'s 的符号未知性上。

需要施加适当的补偿(此处用Nussbaum增益法), 才能进行期望反馈控制设计的研究。

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(t, x)x_{i+1}^{p_i} + f_i(t, x, u), \\ \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = g_n(t, x)u^{p_n} + f_n(t, x, u), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2)$$

□ 系统(2)的一般性和概括性

▶ 不确定性和非线性更为本质

- ① 特定的结构形式：类仿射结构、类下三角结构。
- ② 非参数化的不确定性和非线性：主要体现在下式中的 $\bar{g}_i(x_{[i]})$'s 和 $\bar{f}_i(x_{[i]})$'s 的未知性中：

$$\theta_g \underline{g}_i(x_{[i]}) \leq |g_i(t, x)| \leq \bar{g}_i(x_{[i]}),$$

$$|f_i(t, x, u)| \leq (1 + |x_{i+1}|^{q_i}) \bar{f}_i(x_{[i]}),$$

其中常数 θ_g 和 q_i 's 也是未知的。

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(t, x) x_{i+1}^{p_i} + f_i(t, x, u), \\ \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = g_n(t, x) u^{p_n} + f_n(t, x, u), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2)$$

□ 系统(2)的一般性和概括性

▶ 参考信号 $y_r(t)$ 的一般性

参考信号 y_r 在 $[t_0, +\infty)$ 上局部绝对连续, 且存在未知正常数 M 使得

$$\text{ess sup}_{t \geq t_0} (|y_r(t)| + |\dot{y}_r(t)|) \leq M.$$

- ① 参考信号仅当前可量测, 此后信息不可预知。
- ② 参考信号的界未知, 且其导数不可用

例如, 被拦截导弹的轨迹

□ 跟踪控制目标

基于Funnel策略等，设计状态反馈控制器 $u(t, x)$ ，使得对任意初值，闭环系统的解有界，且跟踪误差 $e(t) = y(t) - y_r(t)$ 始终运行在预设的漏斗 $\{(t, e) \in [t_0, +\infty) \times \mathbf{R} \mid \psi_\lambda(t)|e| < 1\}$ 内。

其中：

$$\psi_\lambda(t) \in \left\{ \psi \in \mathcal{W}^{1,\infty}([t_0, +\infty), \mathbf{R}) \mid \begin{array}{l} \psi(t_0) = 0, \psi(t) > 0 \forall t > t_0, \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) \geq \frac{2}{\lambda} \end{array} \right\}$$

□ 跟踪控制目标

注意到 $|e| < \frac{1}{\psi_\lambda(t)}$ 和 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) \geq \frac{2}{\lambda}$,

① 全局实际跟踪控制

对任意 $\lambda > 0$, 总存在 $T_\lambda \geq t_0$, 使得 $|e(t)| < \lambda, \forall t \geq T_\lambda$.

② 全局固定时间 T_f 实际跟踪控制

对给定 $T_f \geq t_0$, 进一步要求 $\psi_\lambda(t)$ 满足: $\psi_\lambda(t) \geq \frac{1}{\lambda}, \forall t \geq T_f$.

③ 预设最大超调 δ 的半全局实际跟踪控制

对给定 $\delta > 0$, 进一步要求 $\psi_\lambda(t)$ 满足: $\psi_\lambda(t) \geq \frac{1}{\delta}, \forall t \geq t_0$.

□ 预期反馈控制器表达式

控制器表达式： $u = \alpha_n(x, r_n, \xi_n)$,

其使得闭环系统跟踪误差 $e(t)$ 满足 $\psi_\lambda(t)|e(t)| < 1, \forall t \geq t_0$ 。

$\alpha_n(\cdot)$ 由下面迭代过程产生 (从1到 n 且初始设定 $\xi_1 = e$) :

$$\begin{cases} r_i := r_i(t, \xi_i) = \frac{1}{1 - (\varphi_i(t)\xi_i)^2}, \\ \alpha_i(x_{[i]}, r_i, \xi_i) = \left(\frac{k_i}{g_i(x_{[i]})} N(r_i)\xi_i \right)^{\frac{1}{p_i}}, \\ \xi_{i+1} = x_{i+1}^{p_i} + x_{i+1} - \alpha_i^{p_i}(x_{[i]}, r_i, \xi_i), \end{cases}$$

其中 $\varphi_1(t) = \psi_\lambda(t)$,

$$\varphi_i \in \left\{ \psi \in \mathcal{W}^{1,\infty}([t_0, +\infty), \mathbf{R}) \mid \begin{array}{l} \psi(t_0) = 0, \psi(t) > 0 \forall t > t_0, \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) > 0 \end{array} \right\}$$

□ 例子

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(t, x)x_2^3 + f_1(t, x, u), \\ \dot{x}_2 = g_2(t, x)u + f_2(t, x, u), \\ y = x_1. \end{cases}$$

对 $g_i(\cdot)$'s, 假设 $\underline{g}_1(x_1) = 1$, $\underline{g}_2(x_{[2]}) = \sqrt{1+x_2^2}$.

令 $t_0 = 0$, $y_r(t) = \sin(t)$, $\psi_\lambda(t) = \min\{t, 10\}$ 。则根据上页PPT, 得到如下形式的反馈控制器:

$$\begin{cases} u = \frac{5}{\sqrt{1+x_2^2}} r_2 \cos(\pi r_2) \xi_2, \\ \begin{cases} \xi_1 = x_1 - y_r, \\ \xi_2 = x_2^3 + x_2 - 15\xi_1 r_1 \cos(\pi r_1), \\ r_i = \frac{1}{1-(\varphi_i(t)\xi_i)^2}, \quad i = 1, 2, \\ \varphi_1(t) = \psi_\lambda(t), \varphi_2(t) = \min\{2t, 4\}. \end{cases} \end{cases}$$

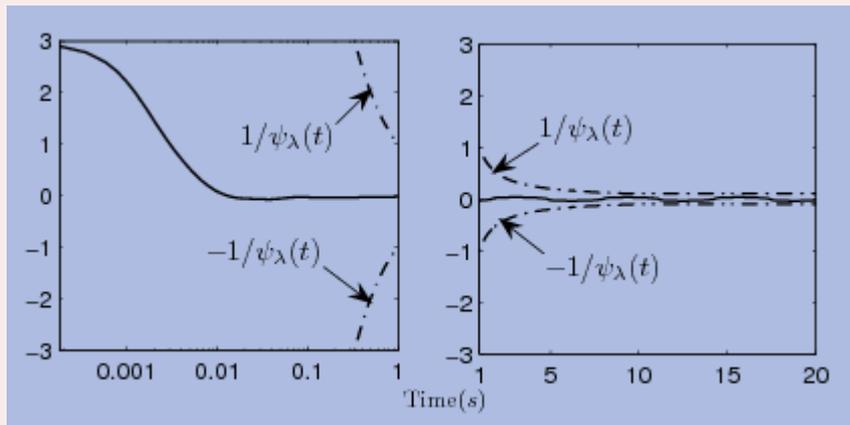
预设暂态性能控制设计



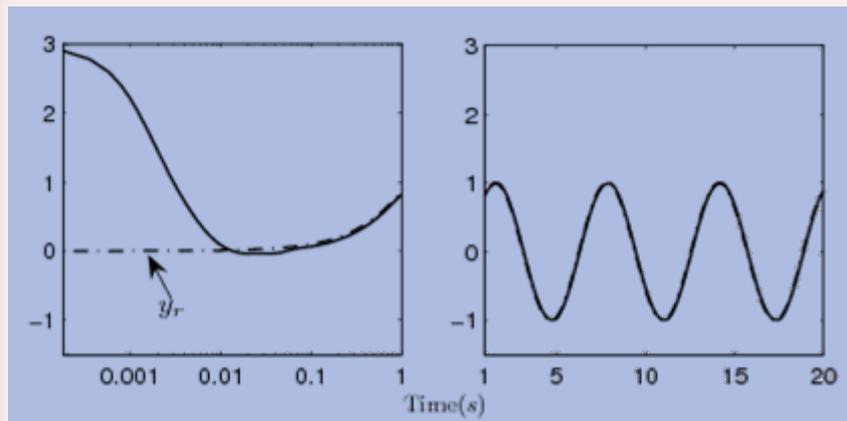
□ 例子

$$g_1(t, x) = 5(x_1^2 + 3), \quad g_2(t, x) = 2(x_2^2 + 5), \quad f_1(t, x, u) = x_2^2 \sin x_1,$$

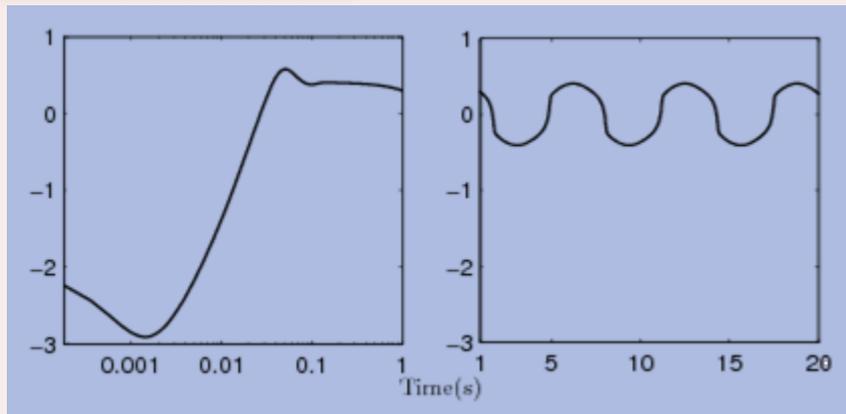
$$f_2(t, x, u) = -10 \sin x_2, \quad x(0) = [3, -2]$$



e 的轨迹



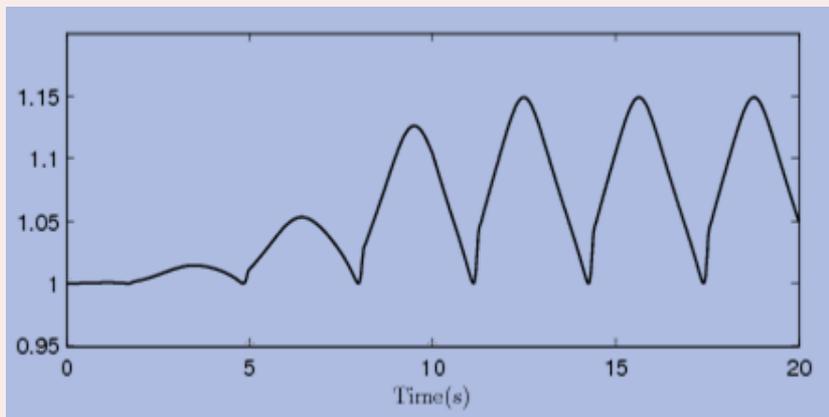
x_1 的轨迹



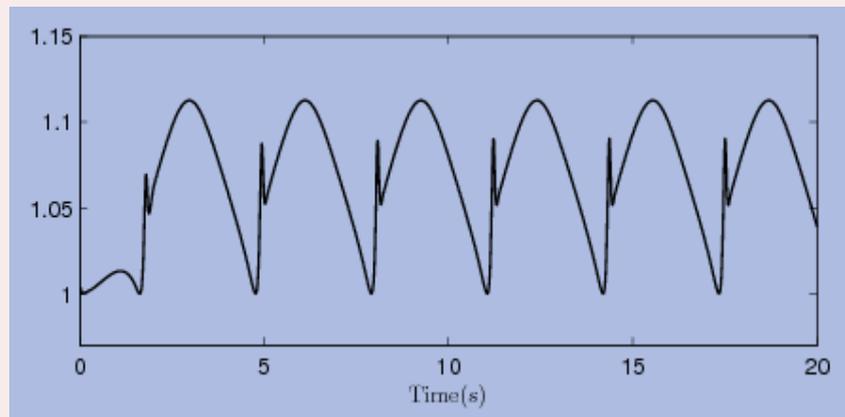
x_2 的轨迹

跟踪误差 $e(t)$
在设定漏斗内

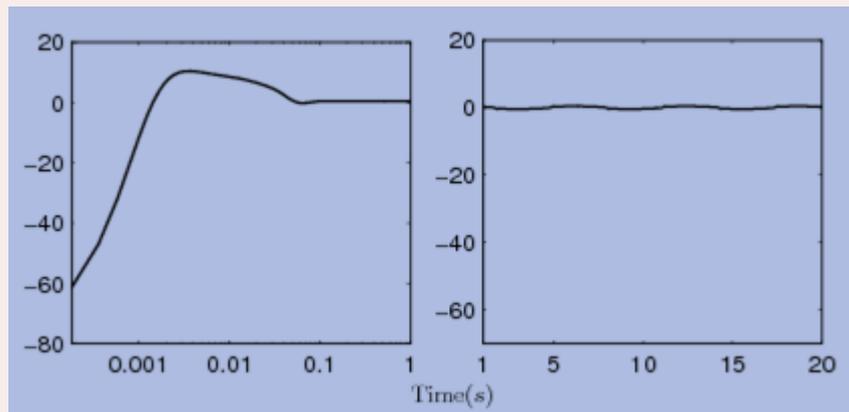
□ 例子



r_1 的轨迹



r_2 的轨迹



u 的轨迹



謝謝！ 敬請指正！