## 附录：中科院系统所姚鹏飞和方海涛两位教授的详细答复

考虑$\mathbb{R}^3$上弹性体$\Omega$的变形。设其材料为$W$，一个关于$3\times 3$ 矩阵的函数。设$u=(u_1,u_2,u_3)$ 为弹性体的变形，设$\mathrm{F}=(f_1,f_2,f_3)$ 为作用在弹性体上的外部力。

设$\mathrm{v}=(v_1,v_2,v_3)$，并设

$$L(\mathrm{v})=\int_\Omega W(\nabla \mathrm{v})dx+\int_\Omega <\mathrm{v},\mathrm{F}> dx \tag{1}$$

为总能量，其中$\nabla\mathrm{v}=(v_{ix_j})$ 为$3\times 3$ 矩阵，

$$<\mathrm{v},\mathrm{F}>=\sum_{i=1}^{3}v_i(x)f_i(x)\quad \text{for}\quad x\in\Omega.$$

于是，在外力F 作用下，弹性体的变形 u，为能量的最小值，即：

$$L(\mathrm{u})=\inf_{\mathrm{v}}L(\mathrm{v})$$

由变分方法，u 满足如下问题：

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial W(\nabla \mathrm{u})}{\partial a_{ij}}\right]=f_i(x)\quad x\in\Omega, i=1,2,3$$

我们假设弹性体为线性，各向同性的，其能量密度为

$$W(\nabla u)=G\sum_{i,j=1}^{3}\epsilon_{ij}^2+\frac{\lambda}{2}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33})^2,$$

其中$G$，$\lambda$为材料常数，

$$\epsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{ix_j}+u_{jx_i}).$$

于是弹性体的形变方程可以写成如下形式：

$$\begin{cases} -[Gdiv\omega_1+\frac{\lambda}{2}(tr\epsilon)_{x_1}]=f_1, & x\in\Omega,\\ -[Gdiv\omega_2+\frac{\lambda}{2}(tr\epsilon)_{x_2}]=f_2, & x\in\Omega,\\ -[Gdiv\omega_3+\frac{\lambda}{2}(tr\epsilon)_{x_3}]=f_3, & x\in\Omega。\end{cases}$$

其中

$$\omega_i=(\epsilon_{i1},\epsilon_{i2},\epsilon_{i3}),\qquad tr\epsilon=\epsilon_{11}+\epsilon_{22}\epsilon_{33}=div\mathrm{u}$$

如果给定上述系统的边界条件，则得到了弹性形变的方程。

由如上方程可知，弹性体的形变方程可以表示成如下形式

$$Au_i=\tilde{f}_i,$$

以及相应的边界条件，其中$A$ 为椭圆算子。根据随机过程的生成元理论，在一定的条件下，存在一个$\Omega$ 内的马氏扩散过程$w(t)$ 使得对于任意 $g \in C_0^2(\Omega)$，即 $g$ 在$\Omega$ 二阶连续可微且$g(x) = 0, x \in \partial\Omega$，有

$$g(w(t)) - g(w(0)) - \int_0^t (Ag)(w(s))ds$$

具有鞅性，于是弹性体的形变可以看作这个马氏扩散过程$w(t)$的一个平均，即：

$$u_i(x) = \int_0^\infty E_x[\tilde{f}_i(w(s))]ds.$$

根据弹性体的形变方程，马氏扩散过程的参数由材料常数确定，由椭圆算子及其边界条件可以构造相应的随机微分方程。