

大系统控制论与复杂网络

席裕庚

上海交通大学自动化系
系统控制与信息处理教育部重点实验室

2013年04月19日

主要内容

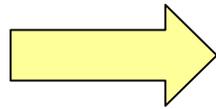
1. 复杂网络及其研究方法
2. 大系统方法对复杂网络宏观分析的启发
3. 大系统方法对复杂网络定量研究的启发
4. 复杂工程网络的研究思路

复杂网络及其研究方法

复杂网络产生的背景

- 无处不在的互联网、无线通信网把原先相互独立的单元连接起来
- 廉价普及的高速计算机、巨型数据库以及GPS 和云计算等手段提供了处理海量数据的能力

复杂网络

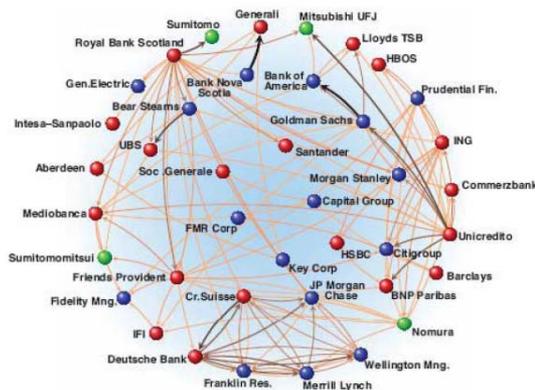


- 大规模
- 高维度
- 连接方式非确定或非规则
- 随机性
- 非线性
- 时变性
- 带有不同时间或空间尺度

复杂网络的例子



交通网



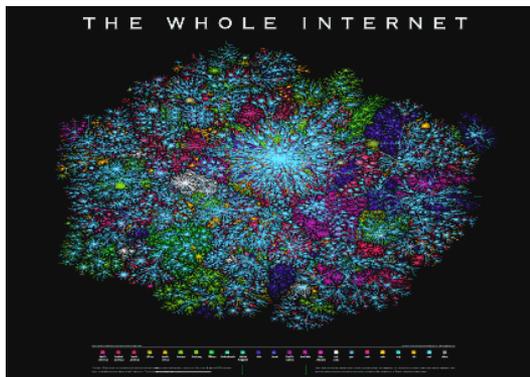
金融网



电力网



生物网



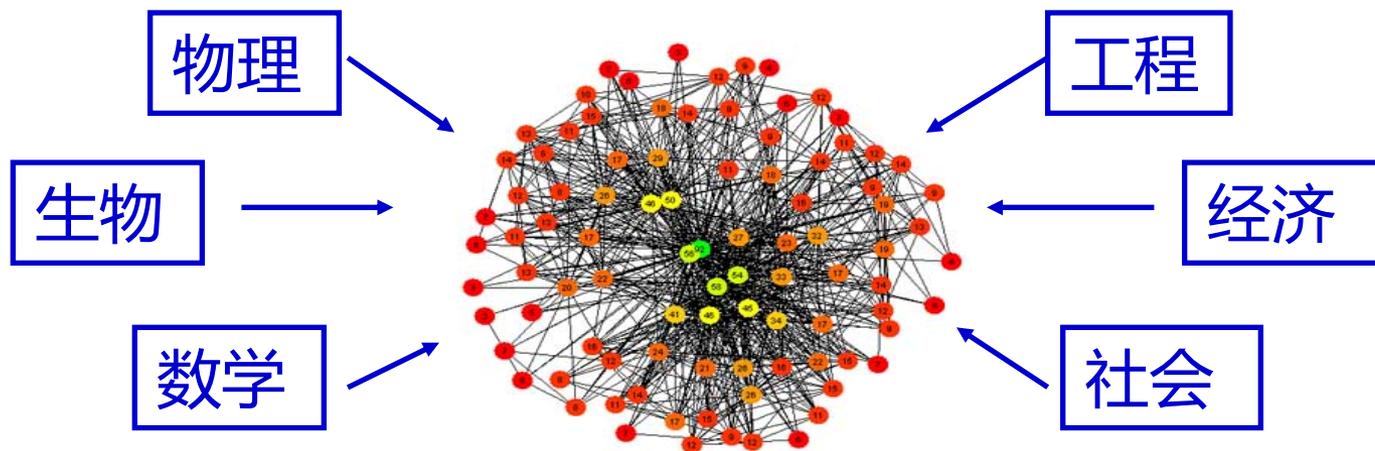
Internet网



传媒网

网络科学的研究内容

网络科学以复杂网络为研究对象，研究其各种拓扑结构及其性质、网络的动力学特性、系统功能及相互内在关系，探索复杂网络系统的各种涌现现象（突变行为）、动力学行为及其产生的物理机制，研究复杂网络中的信息传播、预测与控制，以及实际工程和社会所需的网络设计及其各种应用。



网络科学的研究内容

重点针对复杂网络的结构

— 发现实际网络的宏观特征

例如生物的集群行为、社团结构等

— 建立刻画这些特征的模型

例如随机网络模型、小世界模型、无标度模型等

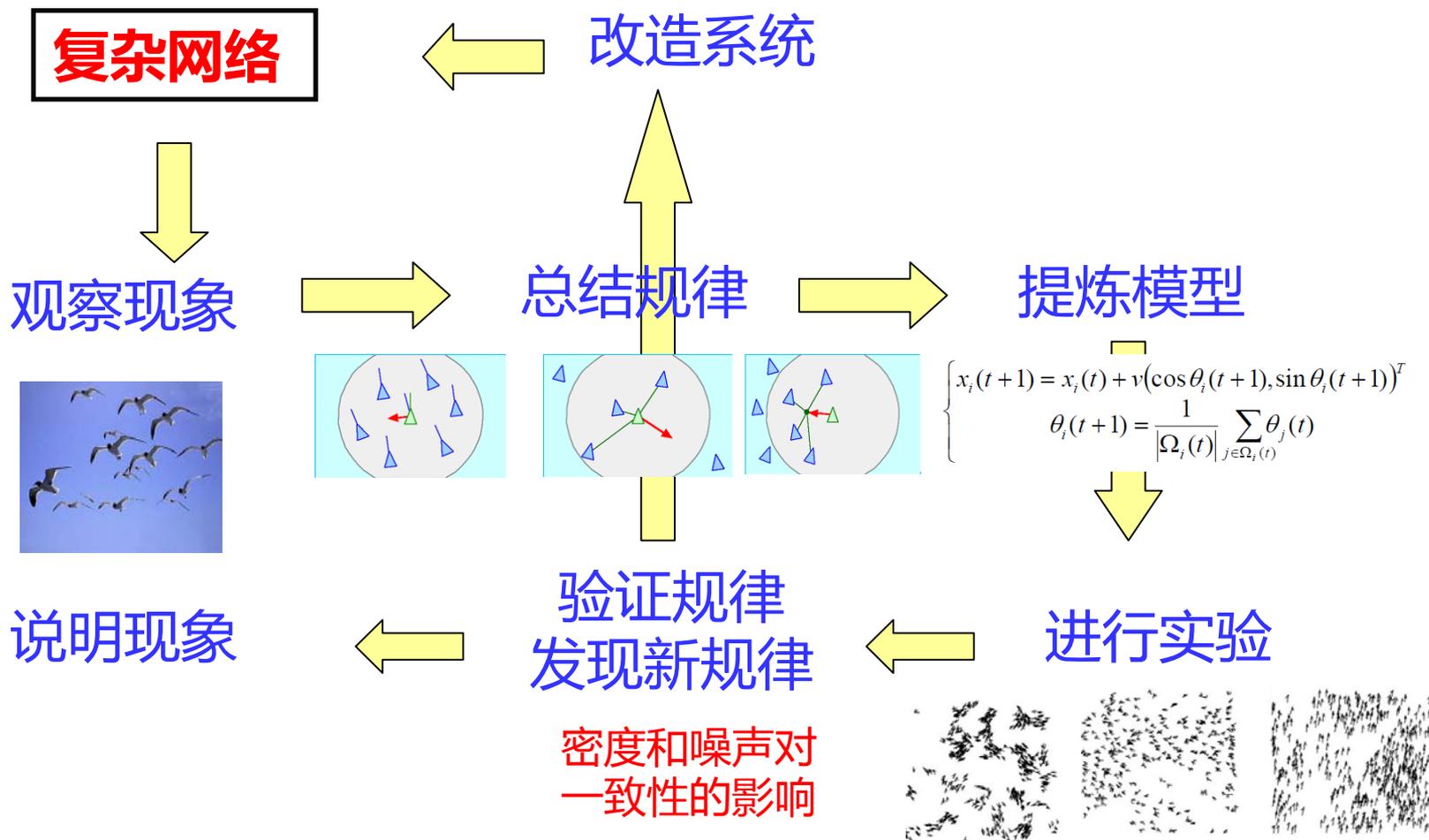
— 研究网络的拓扑结构如何影响其功能

例如网络上的传播、博弈与同步等

— 研究如何利用拓扑特征改善网络的功能

例如网络可控性、牵制控制等

复杂网络的研究方法



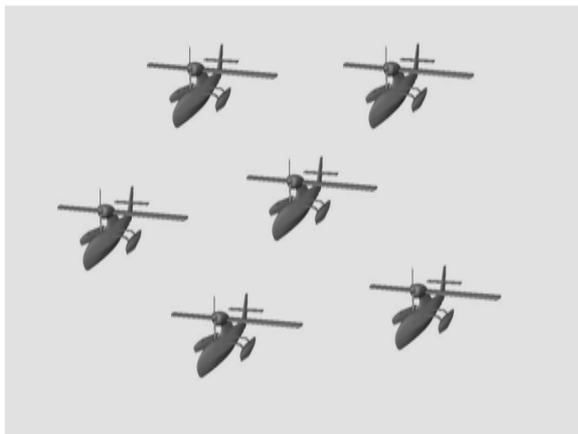
复杂网络研究的不同层面



超高维、随机不确定的复杂网络

采用物理学方法研究系统宏观特征

观察现象 \Rightarrow 总结规律 \Rightarrow 提炼模型 \Rightarrow 进行实验 \Rightarrow 验证规律/发现新规律 \Rightarrow 改造网络



有限维、可建模的复杂网络

采用控制论方法研究个体行为导致的系统宏观特征并控制个体行为予以实现

建立数学模型 \Rightarrow 研究系统宏观特征 \Rightarrow 设计控制律满足宏观特征要求 \Rightarrow 理论证明+实验/仿真验证

控制科学在研究复杂网络中的作用

不仅对研究有限维、可建模的复杂网络提供主要研究手段，而且对复杂网络的宏观分析也提供了支持

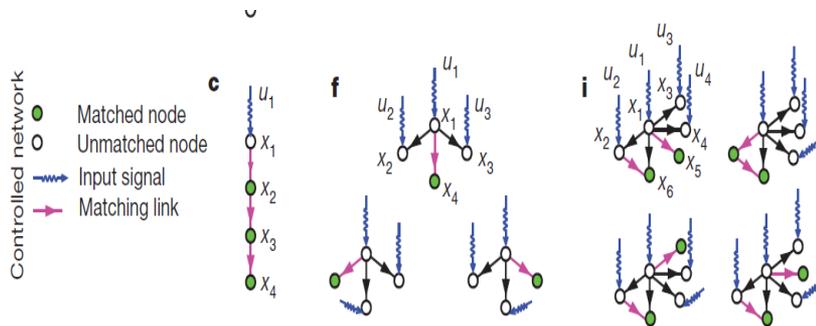
ARTICLE

doi:10.1038/nature11

Controllability of complex networks

Yang-Yu Liu^{1,2}, Jean-Jacques Slotine^{3,4} & Albert-László Barabási^{1,2,5}

Taken together, our results indicate that many aspects of controllability can be explored exactly and analytically for arbitrary networks if we combine the tools of network science and control theory, opening new avenues to deepening our understanding of complex systems.



网络科学工具与控制理论
的结合将有助于精确和解析地探索复杂网络可控性的许多问题

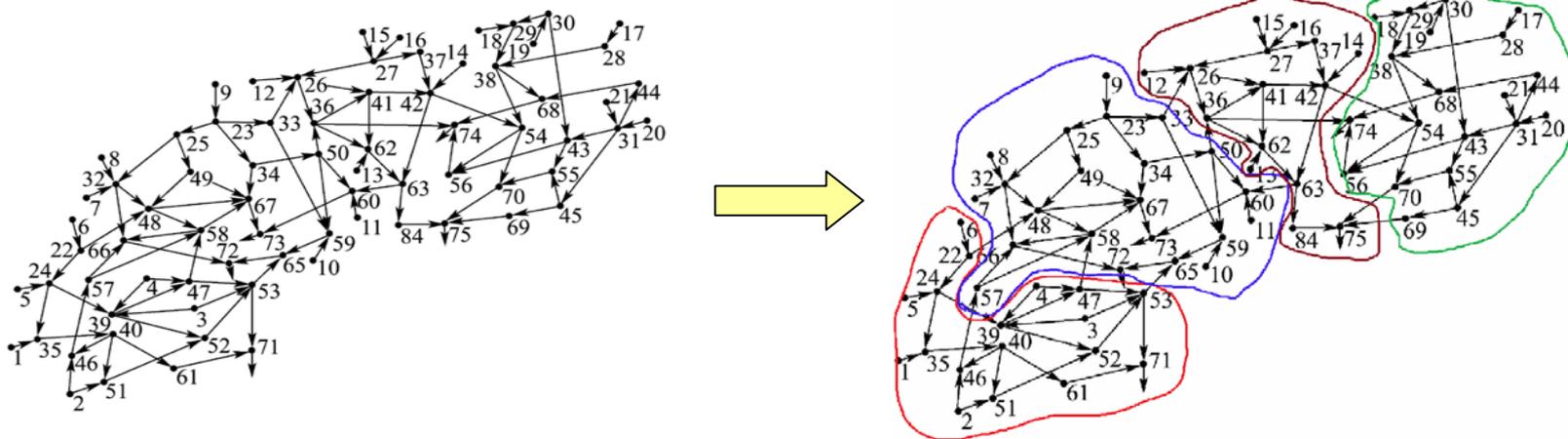
大系统方法对复杂网络 宏观分析的启发

问题1：复杂网络的分解

目的：根据复杂网络节点关联紧密程度进行子系统分解

复杂网络中的社团分解方法

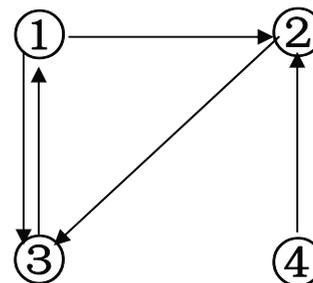
- 把整个网络分解为若干社团，社团内节点连接较多而各社团间只通过少量边连接
- 通过寻找网络中具有最大betweenness值的边，将其从网络中删除对整个网络进行社团分解



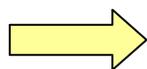
大系统的结构分析方法

结构矩阵

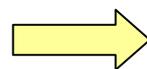
反映系统各单元间的因果关系



邻接矩阵A
表示直接连接关系



可达矩阵R
表示所有可达关系



$R \cap R^T$
表示所有互联群组

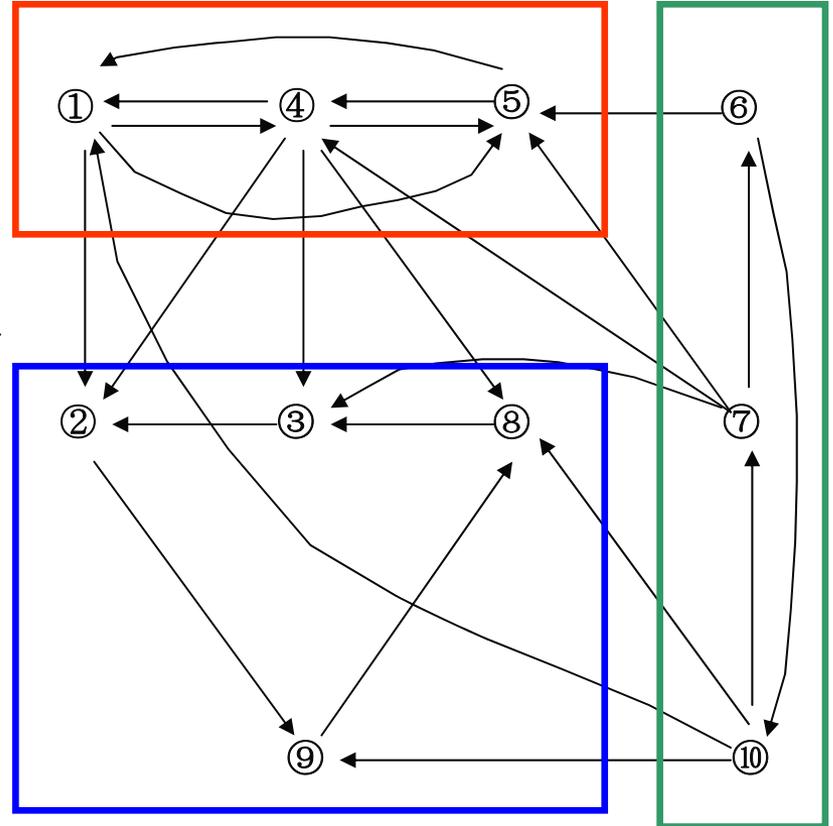
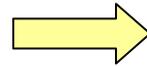
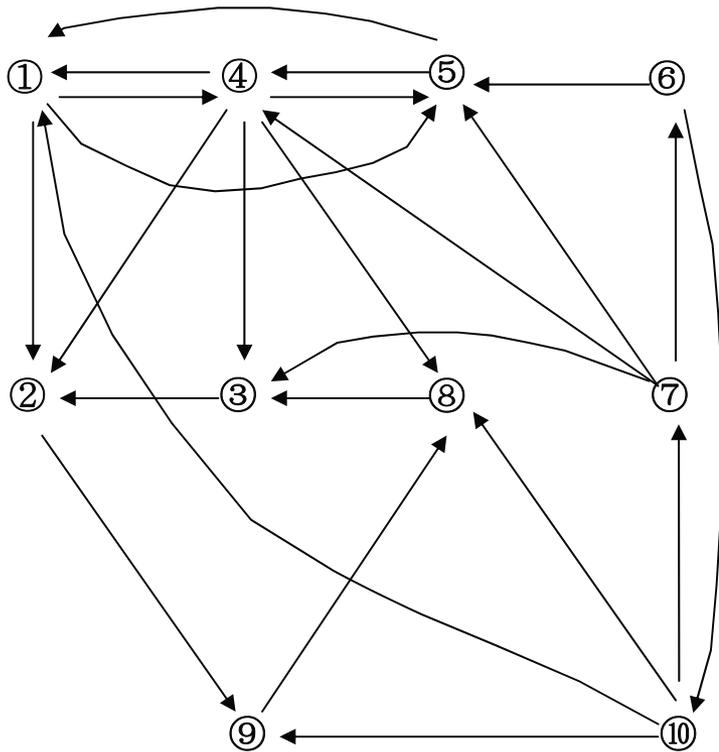
$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \\ \textcircled{1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \times & \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} \\ \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \\ \textcircled{1} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \mathbf{0} \\ \times & \times & \times & \mathbf{0} \\ \times & \times & \times & \mathbf{0} \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \\ \textcircled{1} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \mathbf{0} \\ \times & \times & \times & \mathbf{0} \\ \times & \times & \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times \end{bmatrix} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array}$$

利用结构矩阵理清杂乱信息的因果关系

既受其它点影响，又影响其它点



只受其它点影响，不影响其它点

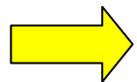
只影响其它点，不受其它点影响

结构分析方法应用于复杂网络分析

邻接矩阵 A : 节点之间直接的可达关系

可达矩阵 $R = (A \cup I)^{N-1}$: 节点之间直到 N 步的可达关系

通过 $R \cap R^T$ 可找出所有相互可达的节点群



对于复杂网络，可以利用上述方法进行分解

利用可达矩阵找出互联群组

在 $R \cap R^T$ 中群组间无耦合元素（每一节点只属于一个群）

把互联群组压缩为广义节点组成集结矩阵

各群组之间只有单向关联，且群组间不连成回路

对集结矩阵进行行列调整理清层次关系

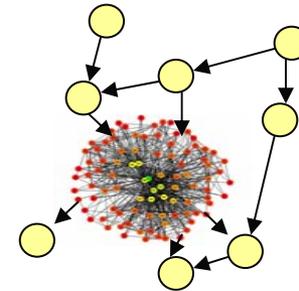
可看清所有群组之间的因果链

计算时间试验个例

试验一个1000个节点的网络

可达矩阵计算时间：约11-12sec

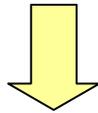
根据可达矩阵运算确定节点群的数目：



	Case1	Case2	Case3	Case4	Case5	Case6
随机产生X元素所占比例	10%	1%	0.2%	0.2%	0.1%	0.1%
邻接矩阵中X元素的个数	100000	10000	2000	2000	1000	1000
分解为互不关联的节点群数	1	1	1 (432点) +568 (单)	1 (287点) +713 (单)	1 (5节点) 1 (7节点) +988 (单节点)	1 (2节点) 1 (7节点) +991 (单节点)

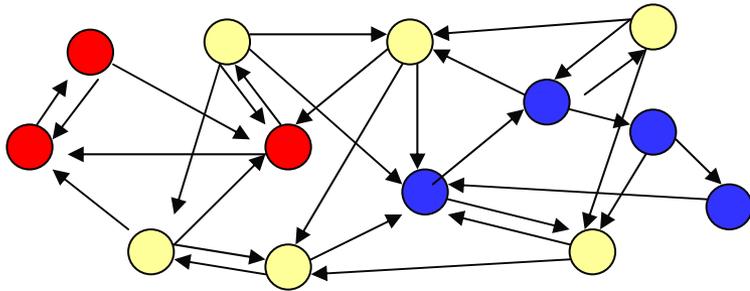
新的问题：节点群内部的关系分析

经分解后的每一互联群组，仍然是一个复杂子网络，节点间相互可达，用可达矩阵方法已无法进行“纯粹”的空间划分。如何分析这类关联紧密网络的内部关系？



引入 k 步可达概念，构建 k 步可达矩阵 $R_k = (A \cup I)^{k-1}$

通过 $R_k \cap R_k^T$ 找出所有在 k 步之内相互可达的节点群。例如



利用有限步可达矩阵可把“抱团”最紧的节点群找出来

利用 k 步可达矩阵，可直接得到信息：

1. 在 k 步内“亲密”互通的节点构成的 k 步可达节点群
2. 每个节点属于哪些节点群
3. 不同节点群之间有无重叠，哪些节点（组）是公共成员

进一步可分析：

1. 每个节点在网络中的活跃度（在不同节点群中出现的总次数）
2. 每个节点在不同节点群联系中发挥的作用（在重叠中出现总次数）

分析的意义

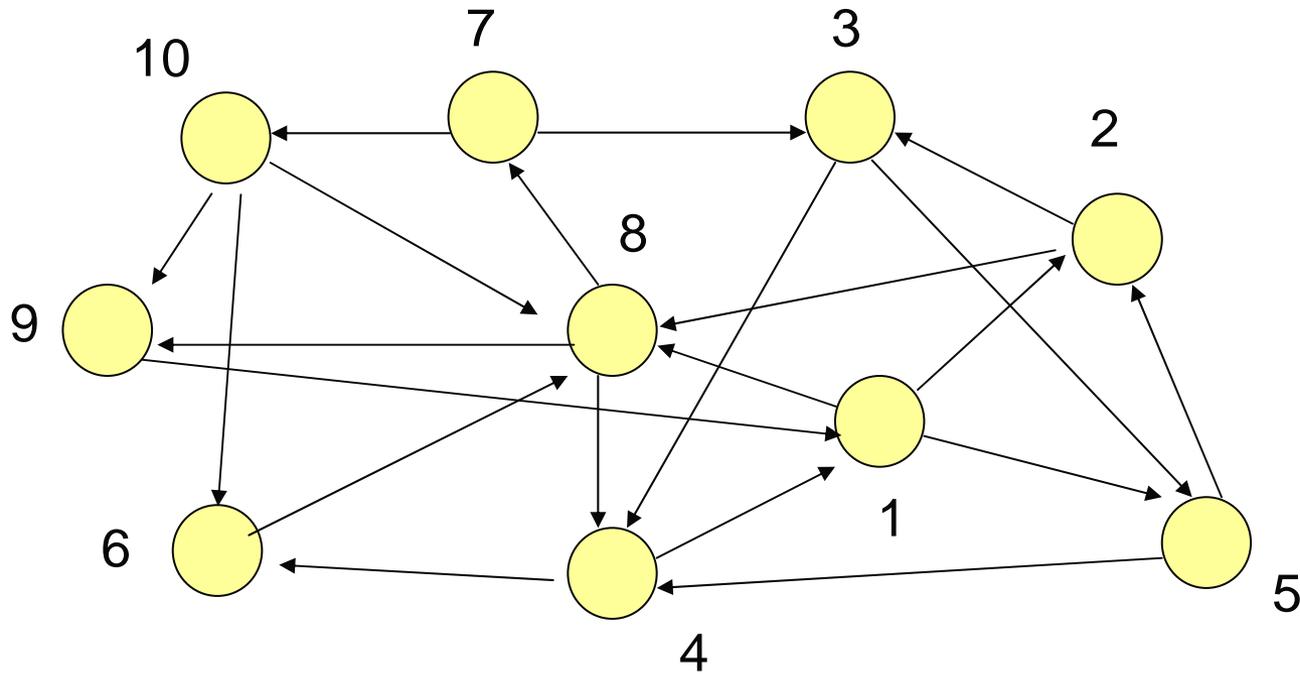
例如在关系网中，可以看出：

哪些成员组成了紧密的团体

哪些成员在很多团体中都在发挥作用，是整个网络中的核心成员

从网络中去除哪些成员后，可使剩余成员关系变得相对简单

例 强关联网络

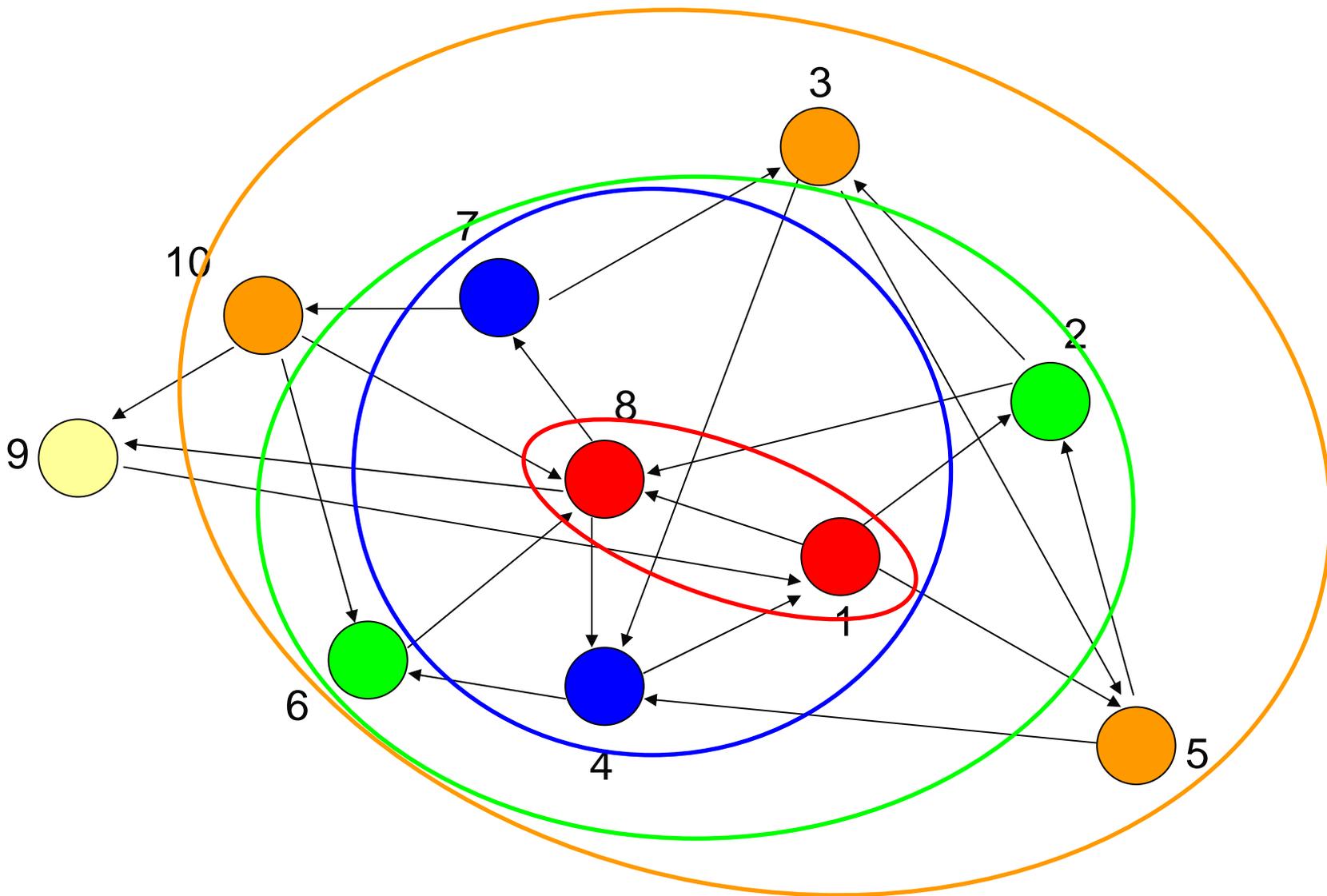


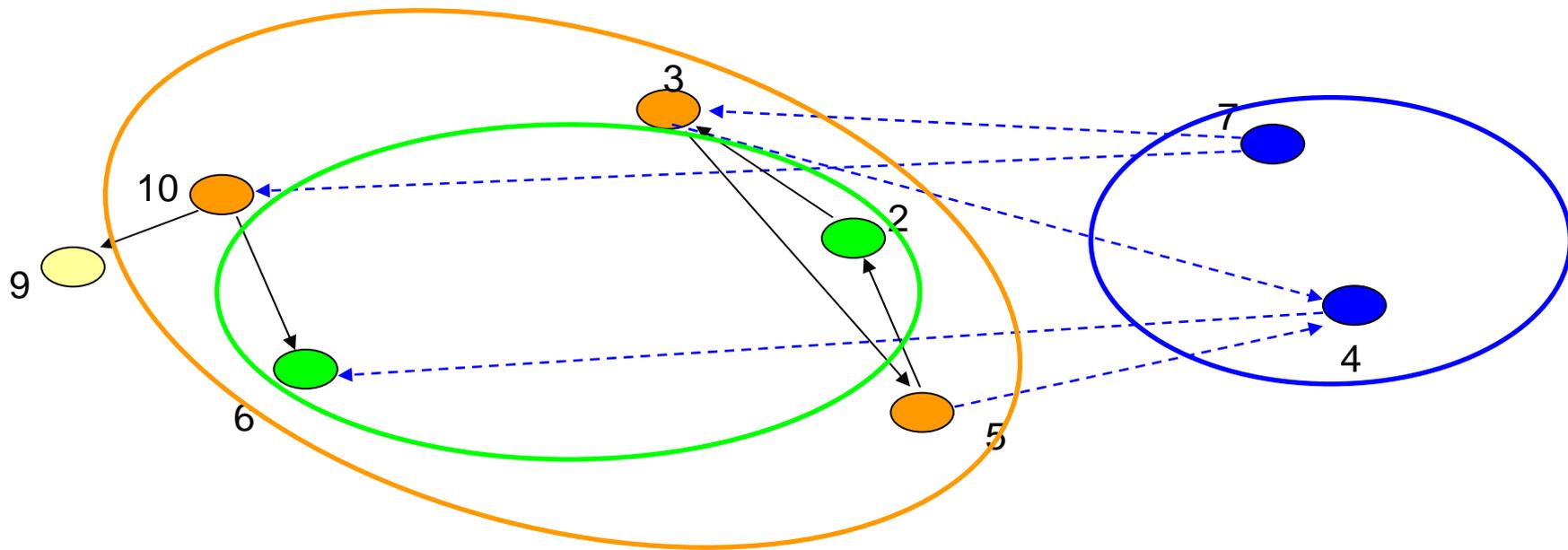
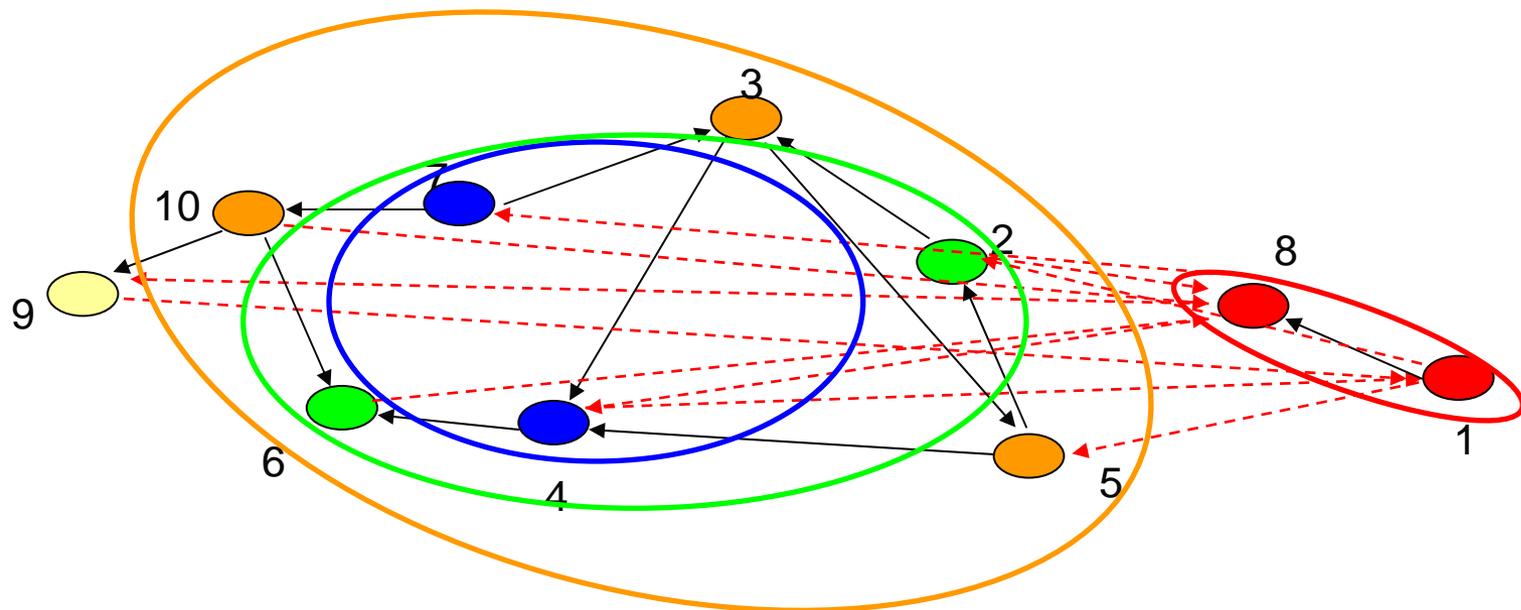
网络中任何两个节点之间均可达，按完全（即N步）可达矩阵计算将得到全X阵，已无法分解

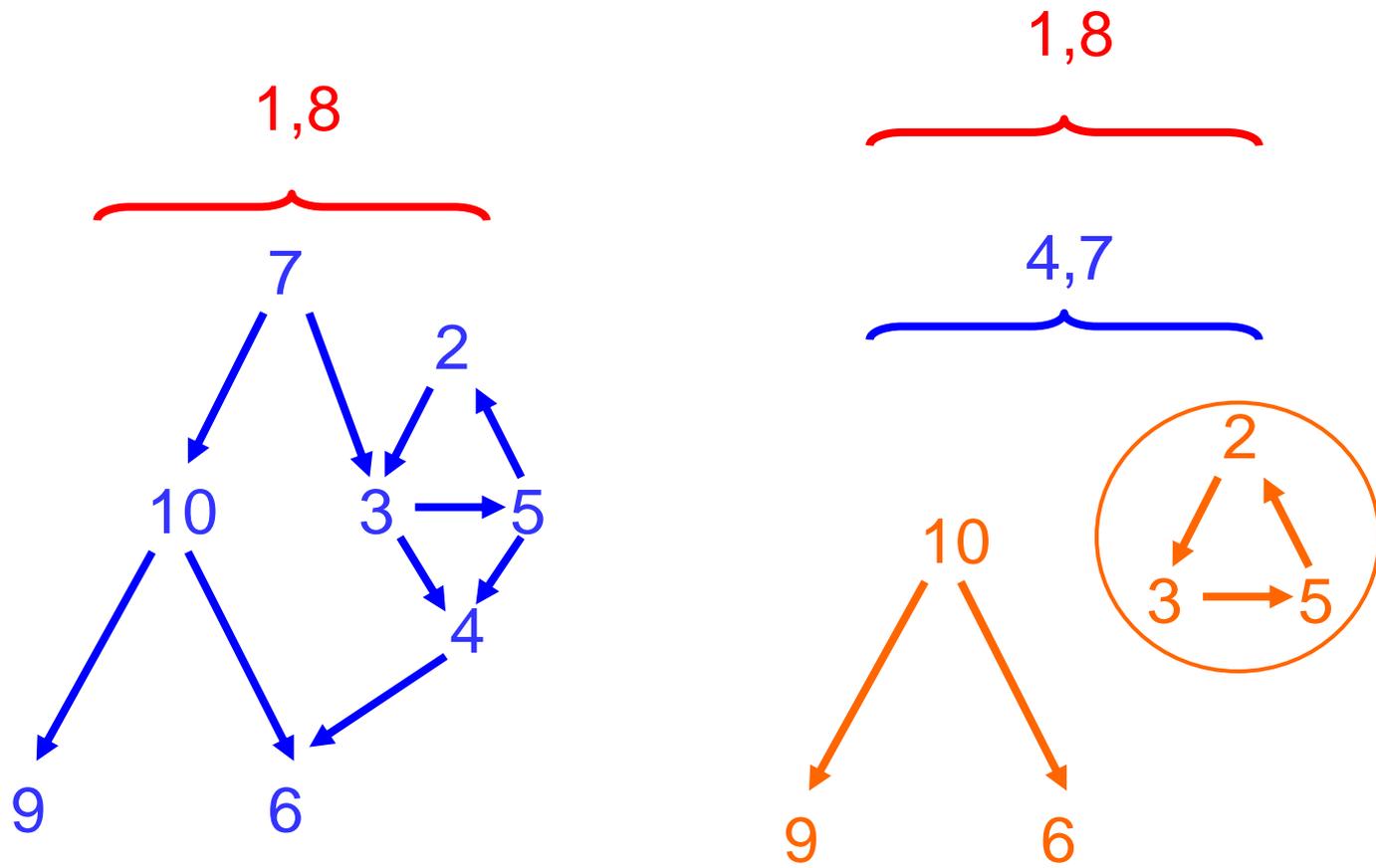
从 $R_4 \cap R_4^T$ 找出4步之内相互可达的所有最大节点群

	1,2,3,4,5,8	1,2,4,5,7,8,9	1,2,7,8,10	1,3,4,6,8	1,4,6,7,8	1,6,7,8,10
1,2,3,4,5,8	×	①⑧②④ ⑤	①⑧②	①⑧③④	①⑧④	①⑧
1,2,4,5,7,8,9	①⑧②④ ⑤	×	①⑧②⑦	①⑧④	①⑧④⑦	①⑧⑦
1,2,7,8,10	①⑧②	①⑧②⑦	×	①⑧	①⑧⑦	①⑧⑦⑩
1,3,4,6,8	①⑧③④	①⑧④	①⑧	×	①⑧④⑥	①⑧⑥
1,4,6,7,8	①⑧④	①⑧④⑦	①⑧⑦	①⑧④⑥	×	①⑧⑥⑦
1,6,7,8,10	①⑧	①⑧⑦	①⑧⑦⑩	①⑧⑥	①⑧⑥⑦	×

重叠次数 ①⑧ : 15次 ④⑦ : 6次 ②⑥ : 3次 ③⑤⑩ 1次

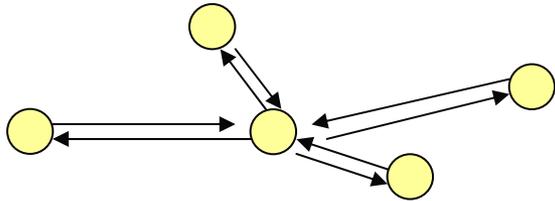




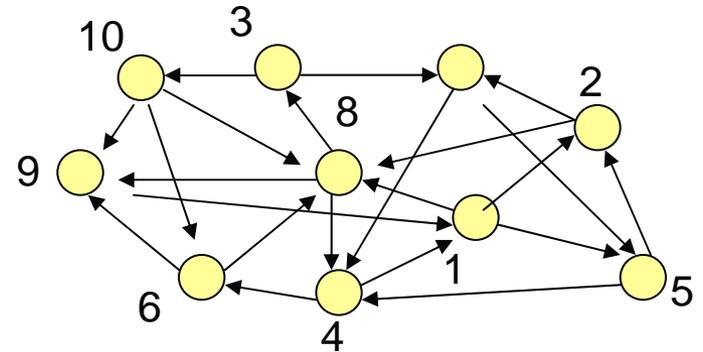


进行了基于节点活跃程度的纵向分层
 去除交叠多的节点后，网络拓扑关系可相对简化
 可继续进行基于节点因果性关联的横向分区

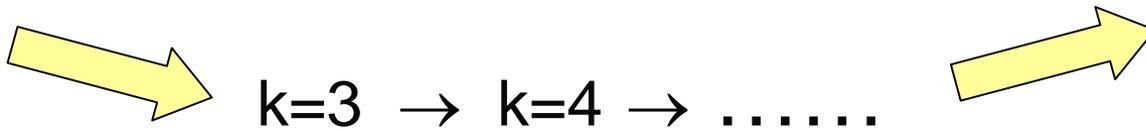
用k步互联群组分析的特点



k=2时表示两节点间的双向连接，等同于复杂网络理论中无向图用连边（度）的多少衡量节点的活跃度（局部，偏重于原因）



k=N时表示网络最终状态下节点之间的连通关系，即可连通或无论怎样走都无法连通（全局，偏重于结果）



适用于有向图，从因果性出发，考虑关联的后续作用

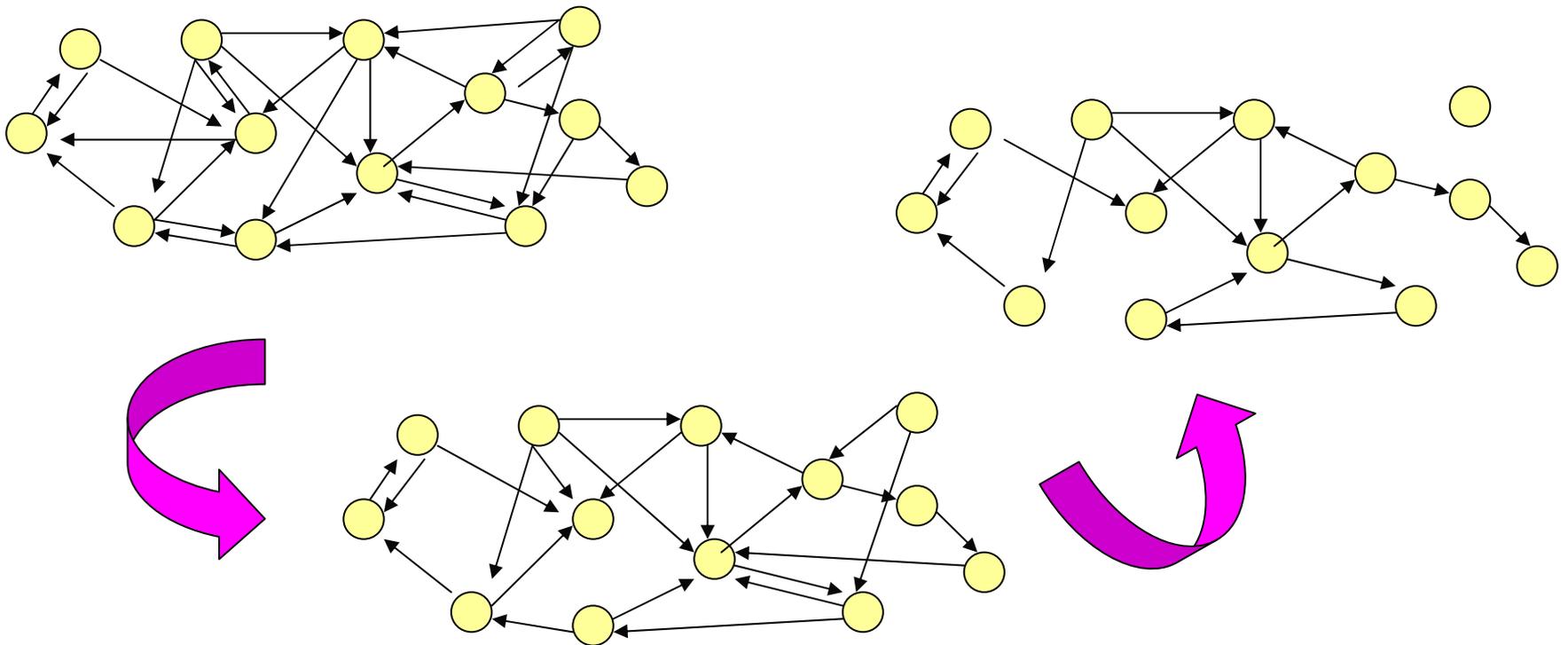
相比于k=2时的“度”，可考虑节点更长远的影响和作用

根据k步互联群组的重叠性，可按活跃程度对节点进行纵向分层

不局限于静态分析，而可观察互联群组随着k增加的演变过程

加权网络通过权系数开关化转为非加权网络

- 加权网络中，边的权系数反映了其两端节点之间关联的强弱
- 通过设定阈值，把节点之间的连接近似为有（1）和无（0）
- 随着阈值由低至高，逐步突出网络结构中相对紧密的节点联系



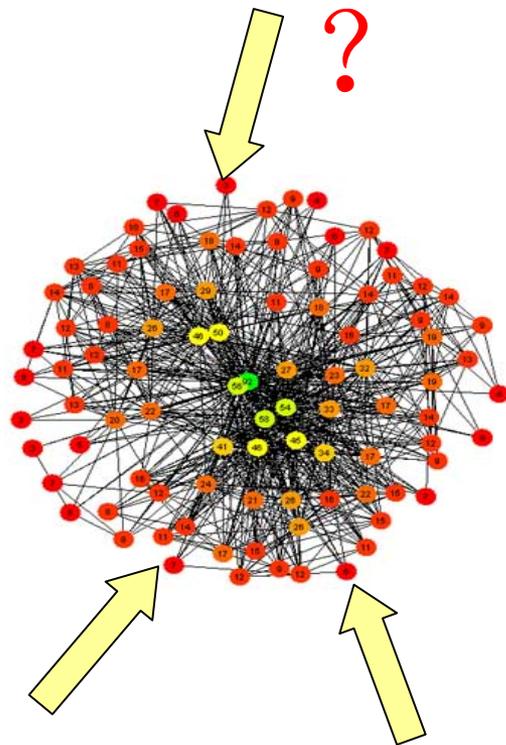
问题2：复杂网络中的牵制控制

牵制控制的基本思想

通过有选择地对网络中的少部分节点施加控制而使整个网络具有期望的行为

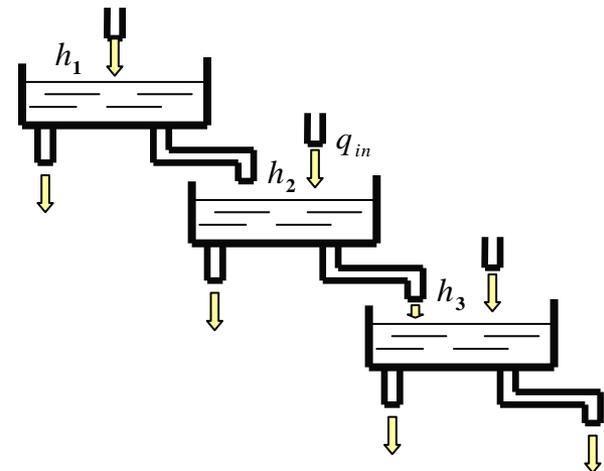
牵制控制研究的基本问题

1. **可行性问题**：对部分节点施加控制使整个动态网络达到期望的状态
2. **有效性问题**：如何选择控制节点使达到控制目标所花的代价最小



控制理论：结构可控性及可行控制方案选择

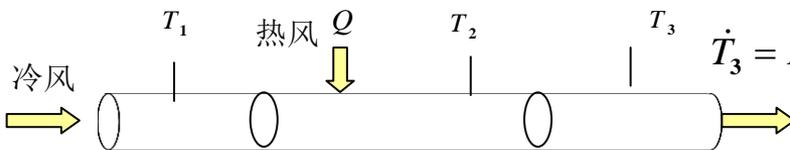
目的：找出大系统的控制方案保证结构可控



$$\dot{h}_1 = f_1(h_1)$$

$$\dot{h}_2 = f_2(h_1, h_2, q_{in})$$

$$\dot{h}_3 = f_3(h_2, h_3)$$



$$\dot{T}_1 = F_1(T_1)$$

$$\dot{T}_2 = F_2(T_1, T_2, Q)$$

$$\dot{T}_3 = F_3(T_2, T_3)$$

线性化方程

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + bu$$

$$\dot{x}_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

→ 系统不可控

结构可控性：只与系统结构有关，是控制系统的必要条件

如何判别系统结构可控？上世纪70-80年代已有很多结果

代数判据

1. 系统是输入可达的，即 R_{ux} 无全零列

$$2. \text{gr} \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} = n$$

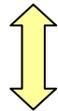
C. T. Lin, IEEE TAC., 19(3):201-208, 1974

K. Glover and L. M. Silverman, IEEE TAC, 21(4):534-537, 1976.

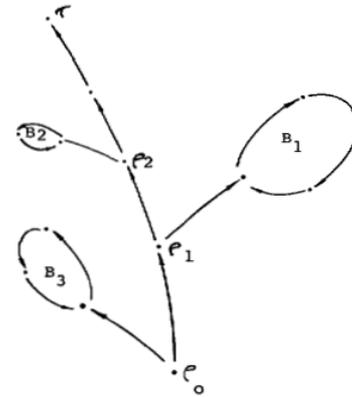
M. Morari, G. Stephanopoulos, AIChE Journal, 26(2):232-246, 1980

图论判据

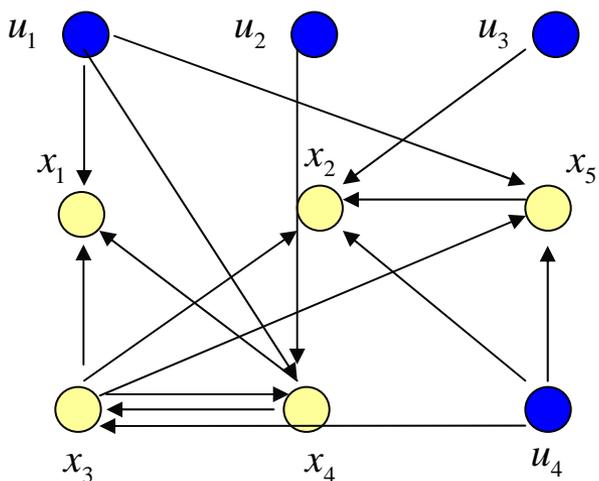
结构可控



(A,b) 构成仙人掌(cactus)



C.T.Lin, Structural Controllability, IEEE Trans.on AC, 19(3):201-208, 1974



$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_3, x_4, u_1) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_3, x_5, u_3, u_4) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_3, x_4, u_4) \\ \dot{x}_4 &= f_4(x_3, x_4, u_1, u_2) \\ \dot{x}_5 &= f_5(x_3, u_1, u_4)\end{aligned}$$

可达性

$$R_{ux} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \end{matrix}$$

秩条件

$$S = \begin{matrix} & x_3 & x_4 & u_1 & u_4 & u_2 & x_5 & u_3 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \times & \times & 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & 0 & \times & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow gr[\bar{A} \quad \bar{B}] = 5$$

结论：该系统结构可控

如何确定系统结构可控的最少控制输入方案？

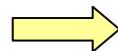
对该问题已有成熟的求解解析算法

秩条件

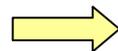
$$S = \begin{matrix} & x_3 & x_4 & u_1 & u_4 & u_2 & x_5 & u_3 \\ \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \end{matrix}$$

用标记法判断去除哪些列可保持S满秩

(R.D.Johnston, G.W.Barton, M.L.Brisk, Determination of the generic rank of structural matrices, Int.J.Control, 40(2):257-264, 1984)



第1-5列中可去除1列
第6-7列中可去除1列



3种选择 $\{u_1, u_2\}$ $\{u_1, u_4\}$ $\{u_2, u_4\}$

复核输入可达性

3种选择均满足输入可达

结论：以上3种方案均可满足系统结构可控且控制输入最少

应用于精馏塔选择可行的控制方案

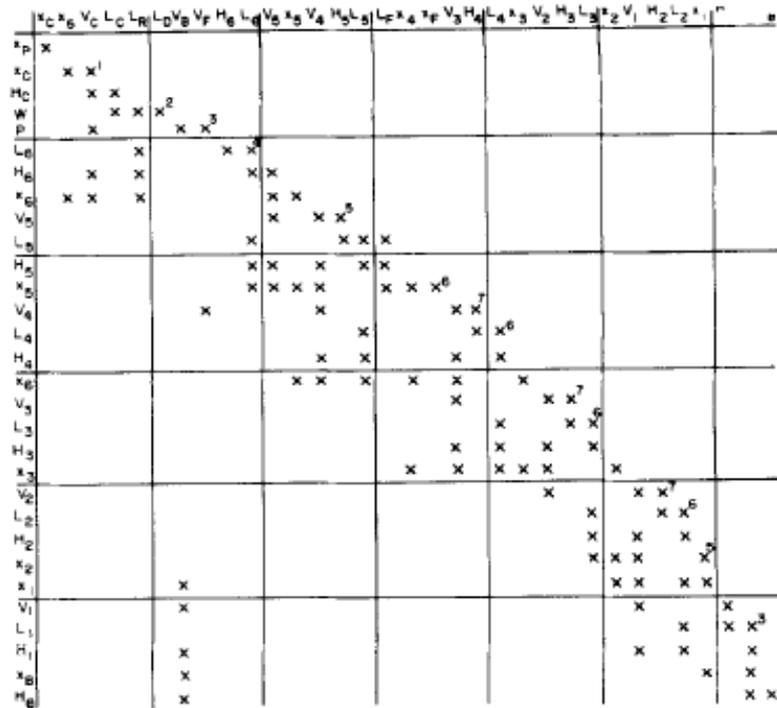


Figure 11. Reordered structural matrix of the distillation column (example 3).

two variables from the set
 V_c, L_c, L_R, L_D

three variables from the set
 $V_c, L_c, L_R, L_D, V_B, V_F, L_F, x_F, L_B$

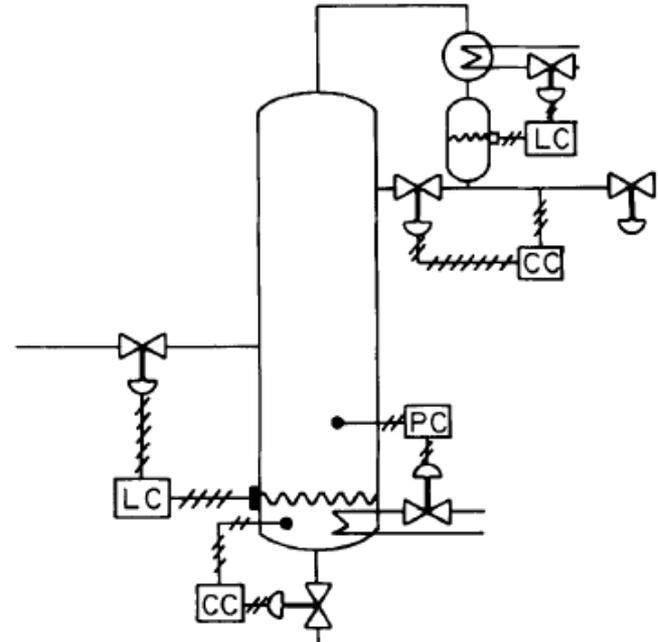
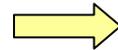


Figure 12. A feasible control structure for the distillation column (example 3).

M.Morari, G.Stephanopoulos, Studies in the Synthesis of Control Structures for Chemical Processes, Part II: Structural Aspects and the Synthesis of Alternative Feasible Control Schemes, AIChE Journal, 26(2):232-246, 1980

借助结构可控性研究牵制控制

归结为找到使网络结构可控的（最少）输入节点，对于结构可控性的判别，已有大量成熟算法可供借鉴

图论方法：例如Nature文中用的匹配节点方法

代数方法：例如可达性条件+秩条件

图论方法和代数方法存在着对应性，但表达方式不同

我们需要**算法能提供更多的信息**，使其不但可以方便地用于分析，而且可以方便地用于综合

对超高维网络系统，判断一个现成的网络是否结构可控并不难，难的是要选出满足要求（例如控制节点最少）的具体方案，虽然有现成算法，但**计算复杂度高**

用结构可控性研究牵制控制：问题的提法

分析类问题：对于一个复杂网络，知道对哪些节点可施加控制，判断是否能实现牵制控制

— 直接利用结构可控性条件判断

综合类问题1：对于一个复杂网络，知道可施加控制的节点范围

如果这些节点可以实现牵制控制，找出满足一定条件（例如最少节点）的牵制控制方案

— 需要研究如何在已有 $[A \ B]$ 阵基础上删去 B 的哪些列仍能满足一般秩条件并同时保持输入可达

如果这些节点不能实现牵制控制，增加哪些输入节点可实现牵制控制

— 需要研究如何在已有 $[A \ B]$ 阵基础上增加 B 的新的列可使一般值满秩并输入可达

综合类问题2：对于一个复杂网络，找出所有可能的牵制控制方案

— 需要对所有 B 阵的选择判断是否满足结构可控性条件

用结构可控性研究牵制控制：有效的算法

基础算法

判断[A B]输入可达的算法

判断[A B]一般秩的算法

判断[A B]行满秩时去除哪些列仍保持行满秩的算法

根据去除列的列表得到所有可去除控制列的算法

面向问题的算法

对于所有（或对指定的）输入节点

找出一种结构可控方案的算法

找出一种满足一定条件的结构可控方案的算法

找出所有结构可控方案的算法

复杂网络中的信息监测

牵制控制的对偶问题

基本思想：通过有选择地对网络中的少部分节点进行监测而了解整个网络（或部分关键部位）的动态

基本问题：

1. 关键部位信息监测问题（部分状态结构可观）：对网络中部分节点进行监测而使网络中某些关键部位信息能得到反映
2. 有效性问题：选择监测点使达到目标所花的代价最小

可借鉴算法与存在问题：与牵制控制对偶

大系统方法对复杂网络 定量研究的启发

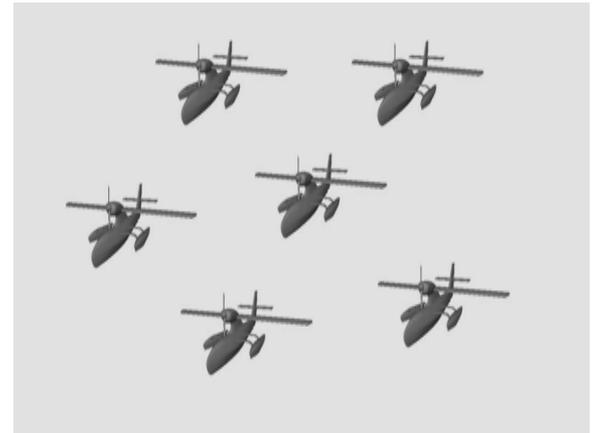
问题3：复杂网络中的多智能体协作

受启发于生物界的集群行为

研究各智能个体在只能获取其邻居信息的情况下采取何种控制算法可以使群体行为保持一致

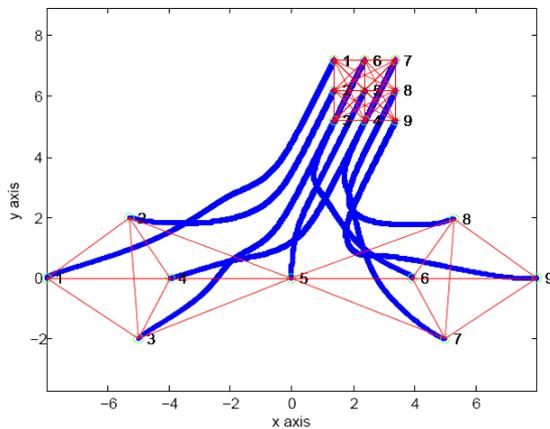
已有大量研究成果和控制算法，其关键点为：

- 连通保持
- 收敛速度

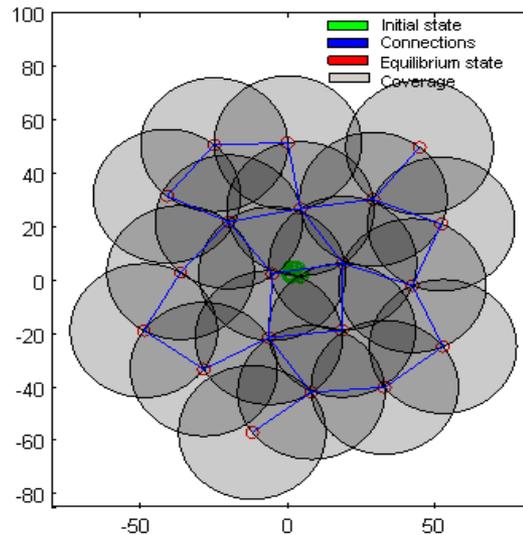


大系统控制论：已为多智能体分布式协作提供了分析和设计的方法

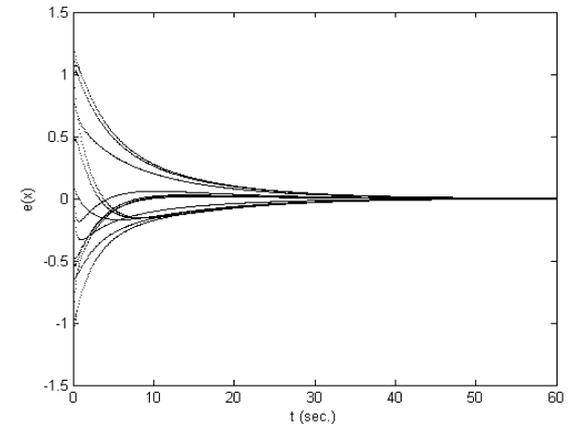
要点：设计势函数保持网络拓扑连通和保持个体间距离
设计合适的反馈控制实现协作目标
用哈密顿函数分析整体系统行为



编队



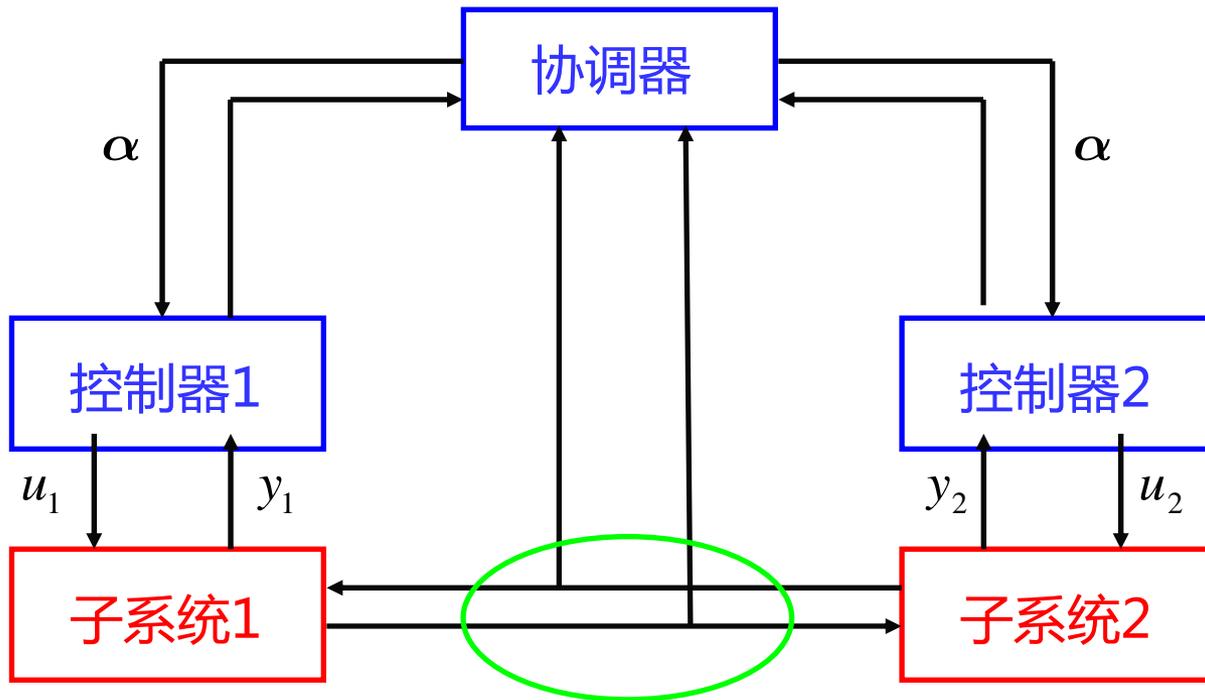
覆盖



一致性

大系统控制论：采用递阶控制结构提高协作效率

目的：通过把整体问题分解为子问题及其关联，分层解决子问题和由子问题关联组成的整体问题

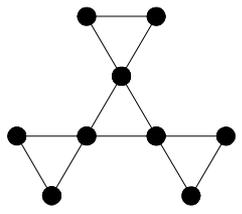


递阶方法在一致性控制中的应用

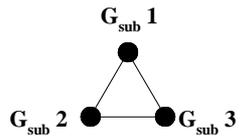
Epstein M., Lynch K., Johansson K., Murray R. Using Hierarchical Decomposition to Speed Up Average Consensus. IFAC World Congress, 2008: 612-618

Li X., Xi Y., Hierarchically decomposing multi-agent system to accelerate group consensus. ASCC2011, 347-352

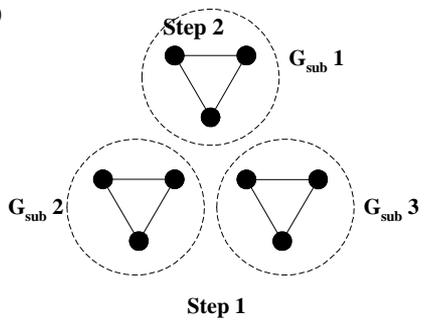
基本思想：把无组织的群体行为通过递阶结构转变为有组织的群体行为，提高协作效率。



$$\lambda_2(G) = 0.5505$$



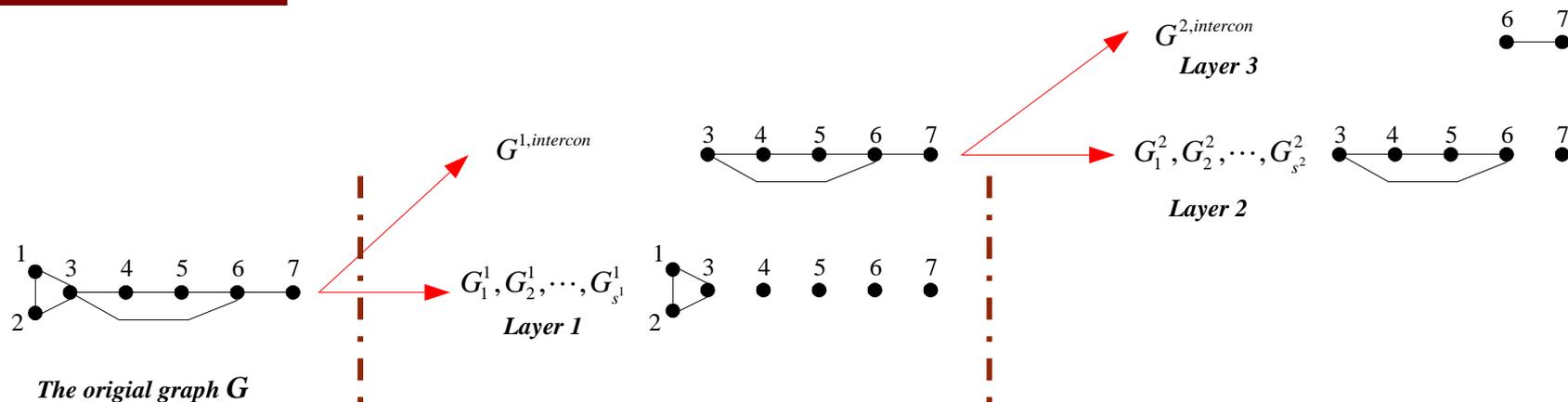
$$\lambda_2(G') = 3$$



$$\lambda_2(G_{sub\ 1}) = \lambda_2(G_{sub\ 2}) = \lambda_2(G_{sub\ 3}) = 3$$

递阶分解算法

基本思路



收敛
时间
测度

$$\frac{1}{\lambda_2(G)}$$

$>$

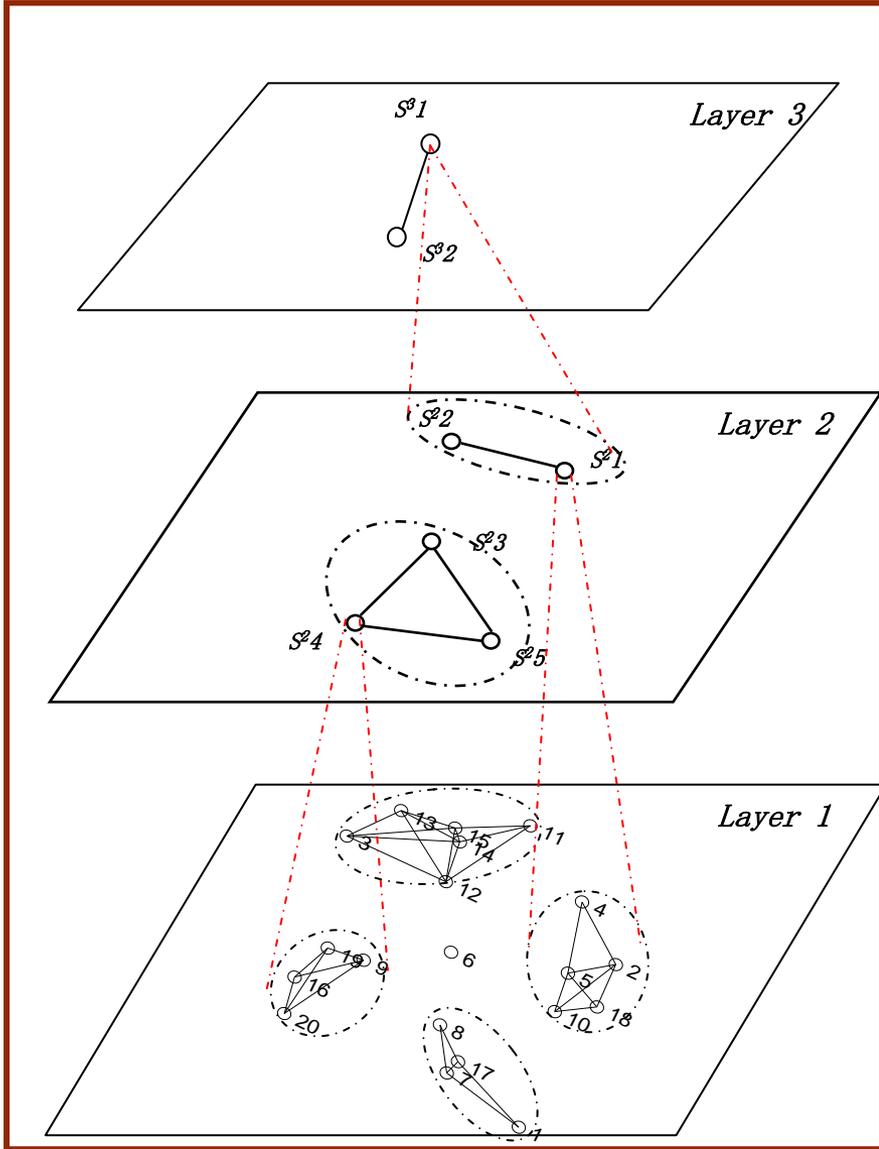
$$\frac{1}{\lambda_2^1} + \frac{1}{\lambda_2(G^{1,intercon})}$$

$>$

$$\frac{1}{\lambda_2^1} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_2(G^{2,intercon})}$$

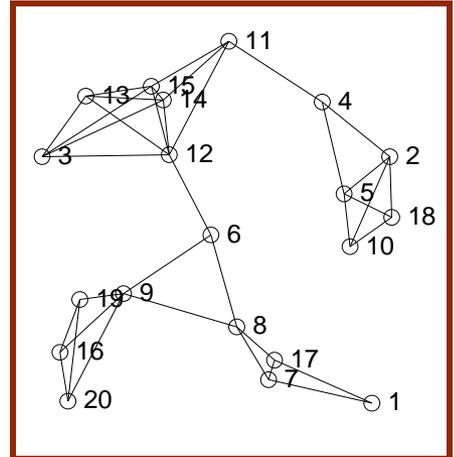
仿真示例

按从低层到高层的顺序，在每层上执行标准的一致性算法



递阶结构

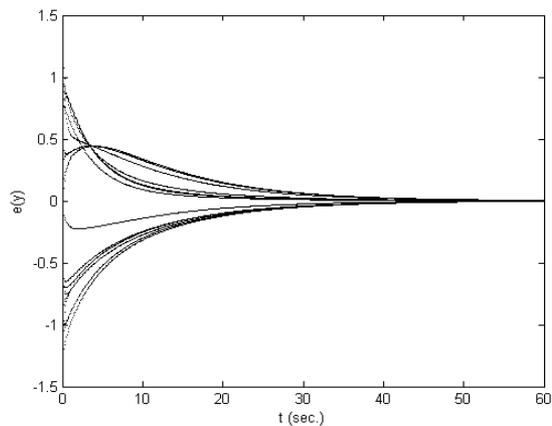
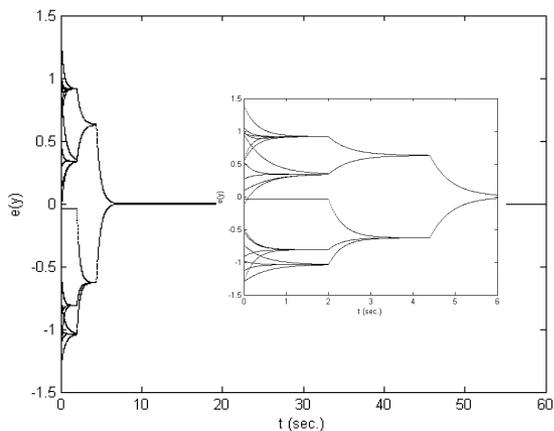
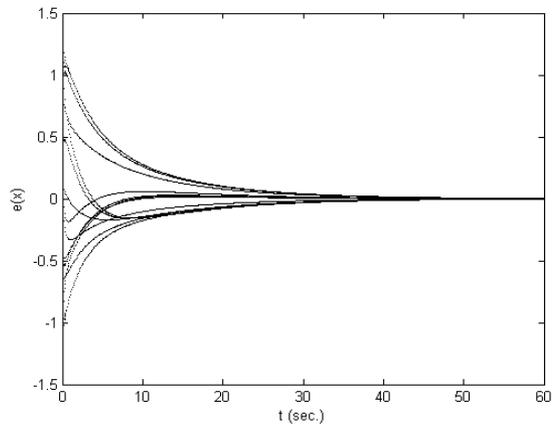
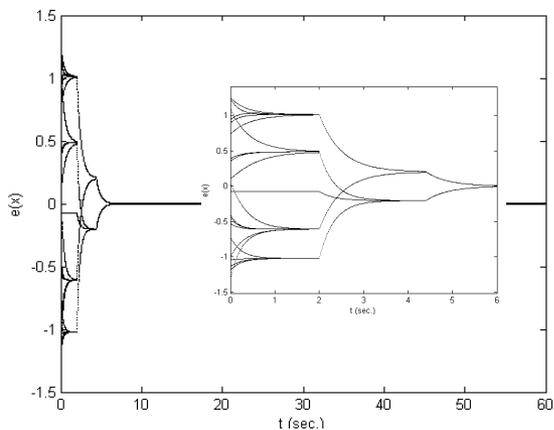
$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_2^i} = 1.5$$



原始单层图
 $\frac{1}{\lambda_2(G)} = 11.223$

递阶结构每一层中包含着若干个分离的子图，每个子图在上一层中被映射为一个节点

仿真结果



递阶一致性算法的收敛过程

标准一致性收敛过程

约6秒

约50秒

问题4：复杂网络中多智能体的分布式控制

复杂网络中每个智能体只能获取其自身的状态信息，能否利用这些信息设计控制律使得整个网络的运行达到期望的要求？

多智能体的分散状态反馈

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u_1, \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + A_{21} x_1 + B_2 u_2, \\ y_1 = C_1 x_1, y_2 = C_2 x_2, \end{cases}$$

$$u_i = K_i x_i$$

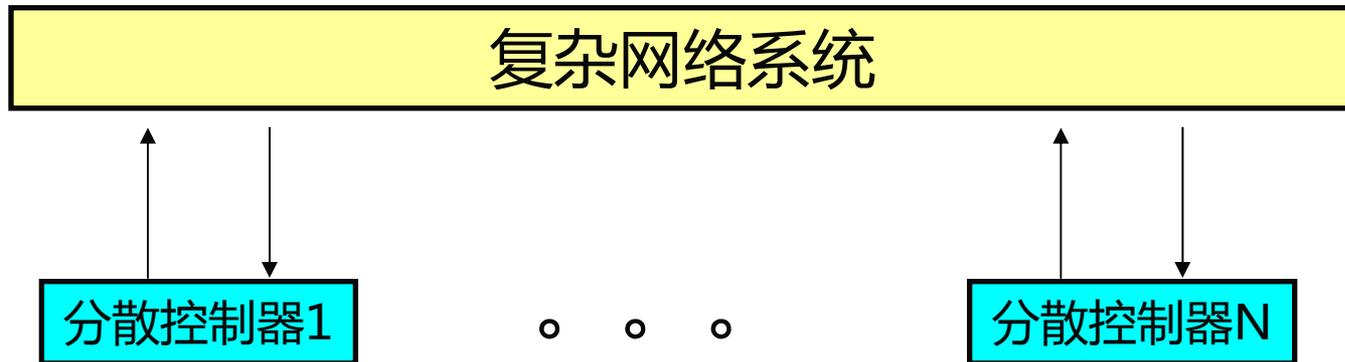


期望状态

在各类工程网络的控制中有重要意义

大系统控制论：分散控制

目的：子系统利用本子系统（全分散）或有限邻接子系统信息（部分分散）设计控制器达到整体稳定或配置极点



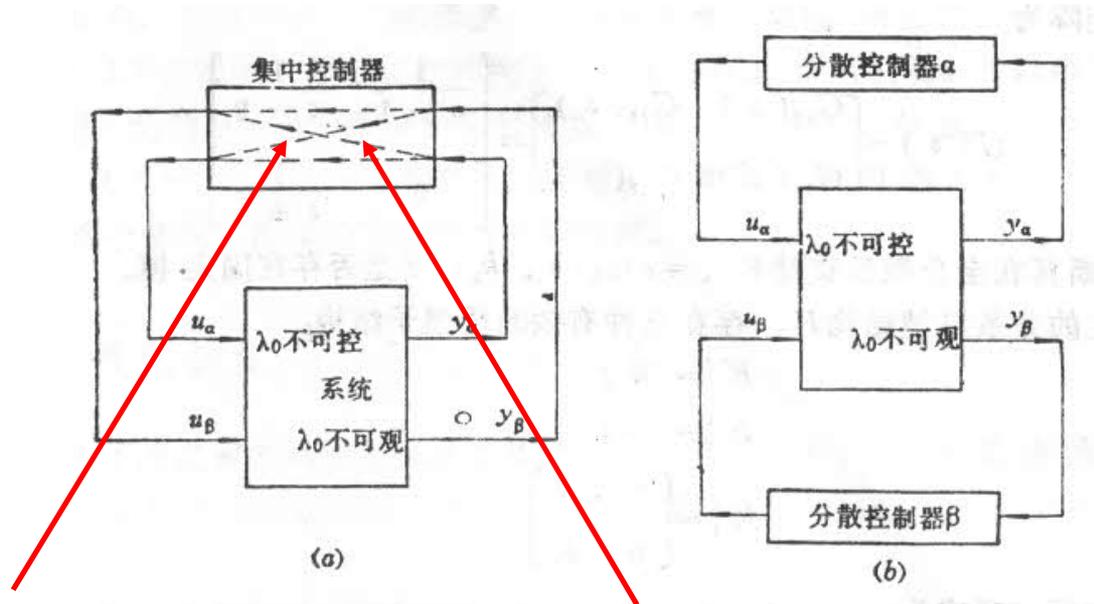
系统

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^N B_i u_i$$
$$y_i = C_i x, \quad i = 1, \dots, N$$

控制律

$$u_i = f_i(y_i), \quad i = 1, \dots, N$$

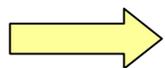
分散控制的必要条件（能不能控制的问题）



由于信息结构的约束，增加了不构成通路的可能性，使一些集中情况下可控可观的特征值也变得无法通过控制改变！

分散可镇定的充要条件

系统 (C, A, B) 对于分散反馈结构 \bar{K} 不存在不稳定固定模



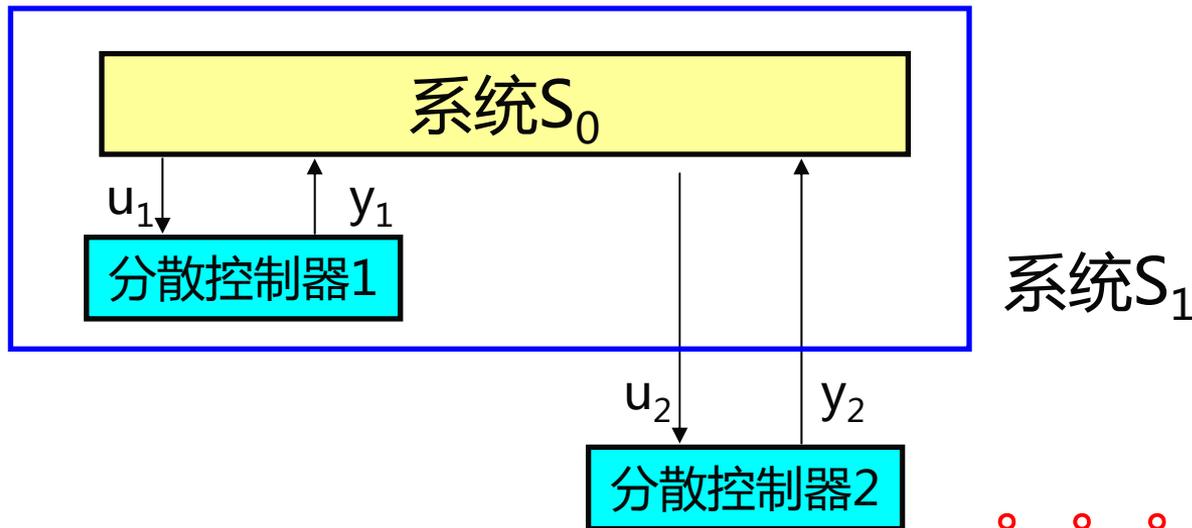
在上世纪70-80年代已涌现了大量研究成果

分散控制的镇定/极点配置算法（如何控制的问题）

主要针对输出反馈问题，分散控制器采用带有动态补偿的输出反馈控制律

$$u_i = H_i z_i + K_i y_i$$
$$\dot{z}_i = F_i z_i + S_i y_i \quad i = 1, \dots, N$$

经典控制论成果只能用于集中反馈的情况，反馈结构受限时需要通过顺序设计步骤逐个地用集中方法设计子系统控制器



例 分散化极点配置

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$\gamma \neq 1$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

控制器1

$$\dot{z}_1 = -6z_1 + y_1$$

$$u_1 = 60z_1 - 11y_1$$

控制器2

$$\dot{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{36(2\gamma-1)}{\gamma-1} & -\frac{72(2\gamma-1)}{\gamma-1} & -\frac{58\gamma-47}{\gamma-1} & -12 \end{bmatrix} z_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_2$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} \frac{360-756\gamma}{(\gamma-1)^2} & \frac{660-1452\gamma}{(\gamma-1)^2} & \frac{360-481\gamma}{(\gamma-1)^2} & -\frac{60}{\gamma-1} \end{bmatrix} z_2 + \frac{11}{\gamma-1} y_2$$

可将闭环系统极点全部配置在 $s=-1,-2,-3$ 处

大系统分散控制理论对复杂网络研究的启示

1. 线性多智能体分散状态反馈问题

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u_1, \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + A_{21} x_1 + B_2 u_2, \\ u_1 = K_1 x_1, u_2 = K_2 x_2, \end{cases}$$

等价于经典意义下的分散静态输出反馈，即

$$u_i = K_i y_i, \quad y_i = C_i x, \quad C_i = [0 \quad \cdots \quad I_i \quad \cdots \quad 0]$$

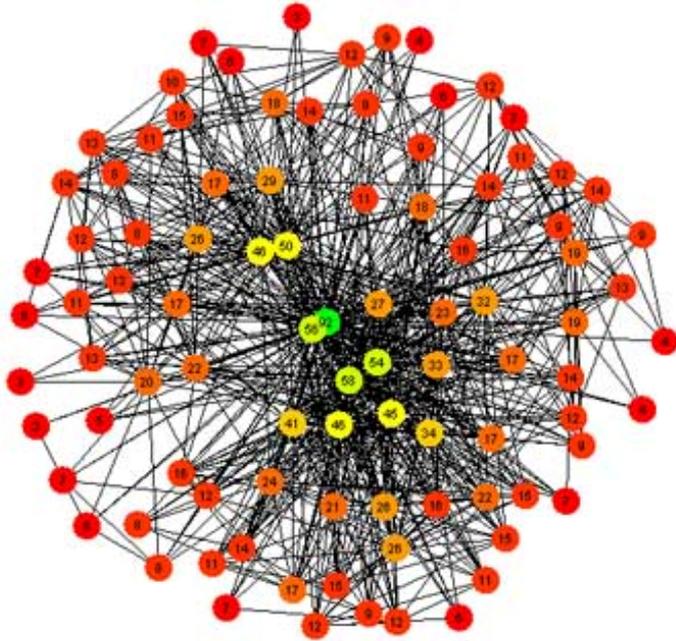
由于是静态输出反馈，不一定能镇定系统

如果只用局部状态信息，则需考虑固定模，且要采用动态反馈

2. 复杂网络分散控制是否有类似固定模的不可控问题？

对于线性网络，分散控制理论已经提出固定模并研究了这个问题，对于非线性网络，可以猜测：在分散控制中因反馈通道被削减，系统控制能力必定减弱，同样有可能部分状态从可控变得不可控。这是一个值得研究的新问题。

问题5：复杂网络的稳定性分析



对于一个有超多节点构成的动态网络，如何判别其稳定性？

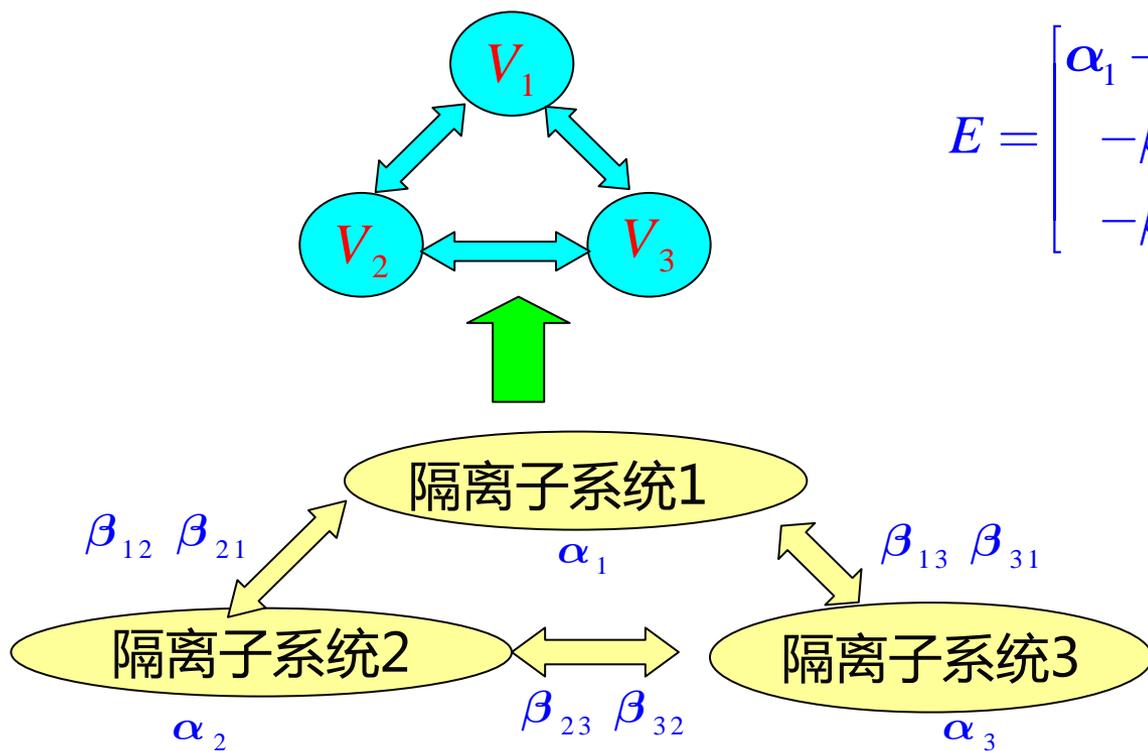
一般非线性系统稳定性的判别方法：Lyapunov方法

复杂网络节点（状态）数超多

- Lyapunov函数寻找困难
- 其递减条件难以导出

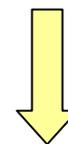
大系统控制论：组合系统稳定性分析方法

目的：把复杂网络看作由子系统关联而成的组合系统，应用分解-集结原理，通过定量刻画子系统和关联对稳定性影响的集结矩阵判断网络整体的稳定性



$$E = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_{11} & -\beta_{12} & -\beta_{13} \\ -\beta_{21} & \alpha_2 - \beta_{22} & -\beta_{23} \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & \alpha_3 - \beta_{33} \end{bmatrix}$$

E 为M矩阵



整体系统稳定

组合系统方法稳定性分析的基本思路

1. 用一个特征pdu函数集结隔离子系统的状态
 2. 给出隔离子系统pdu函数满足的条件
 3. 给出关联项满足这些pdu函数的条件
 4. 以这些pdu函数作为整体系统的集结状态
 5. 应用比较原理判断整体系统的稳定性
- 适用于状态稳定和输入输出稳定的判断
 - 不要求隔离子系统必须稳定
 - 体现了把整体系统集结为子系统的分析方法
 - 给出的充分条件具有较大的保守性

组合系统方法对复杂网络稳定性分析和设计的启示

复杂网络系统的宏观特征可以通过分解为子网络后用相关的特征量来描述

分析：可直接用于分析非线性网络系统的稳定性

设计：可用于多智能体分散状态反馈的设计，即把分散状态反馈构成的闭环系统看成组合系统，导出包含反馈参数在内的稳定性充分条件，然后确定反馈参数

缺点：充分条件，保守性较大

复杂工程网络的研究思路

1. 复杂网络是由相互关联的子系统所组成的大系统，大系统控制论和网络科学的研究有什么不同？

研究的前提不同

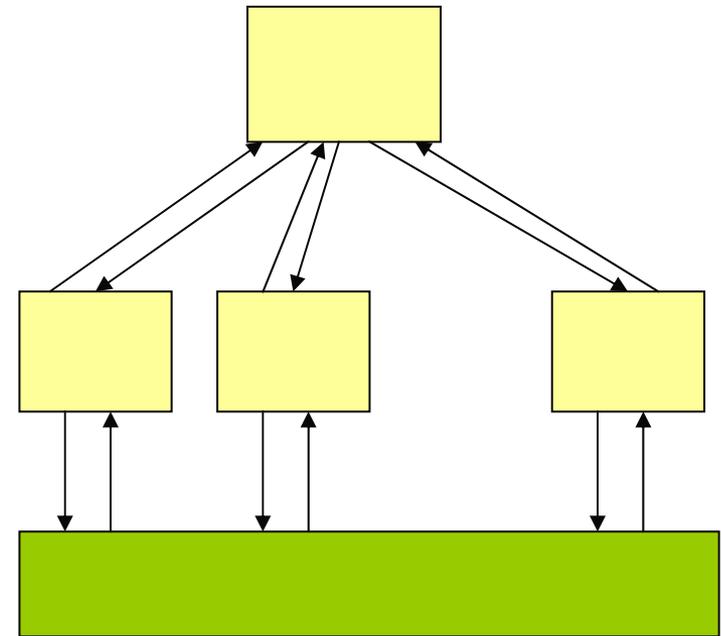
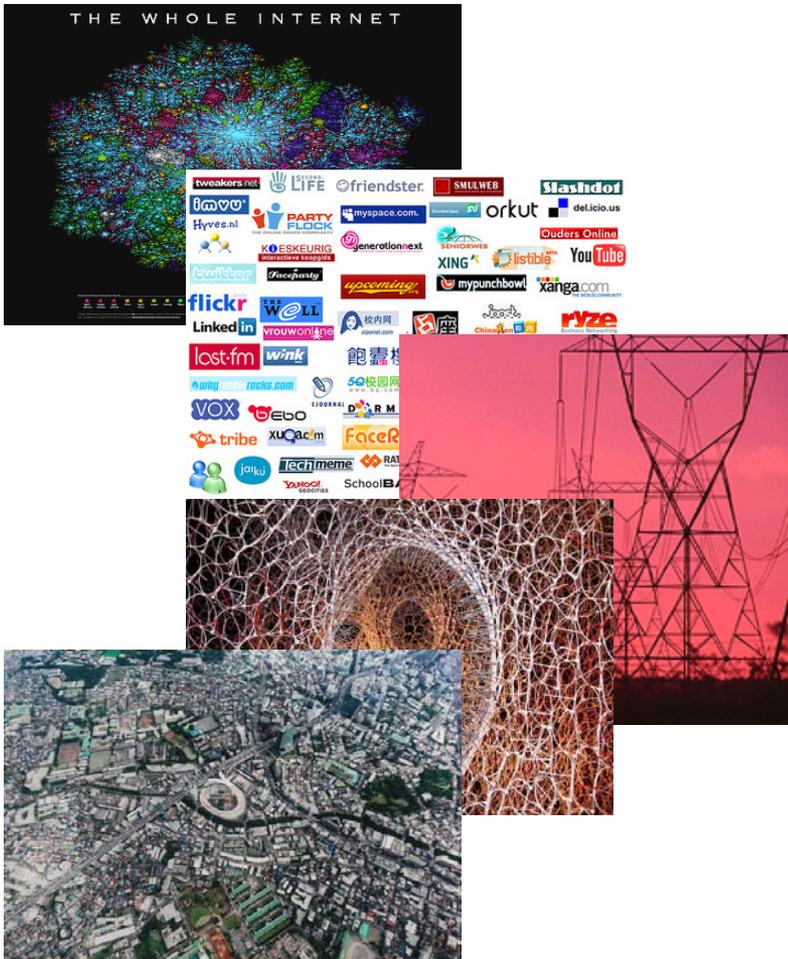
大系统理论：模型已知、状态方程、确定性系统、有限维数（尽管很高），注重于系统状态

网络科学：模型不一定清楚、未必有状态方程、考虑随机性、超高维数，注重于系统结构

研究的层面不同

网络科学：宏观分析

大系统控制论：微观分析与设计

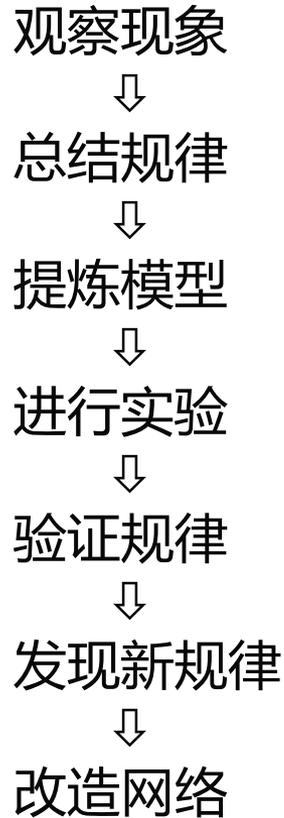


$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} x_j + B_i u_i$$

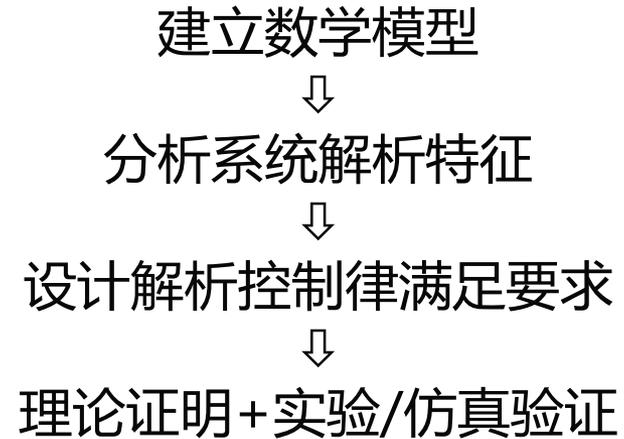
$$y_i = C_i x$$

研究的方法不同

网络科学：实证方法



大系统控制论：解析方法



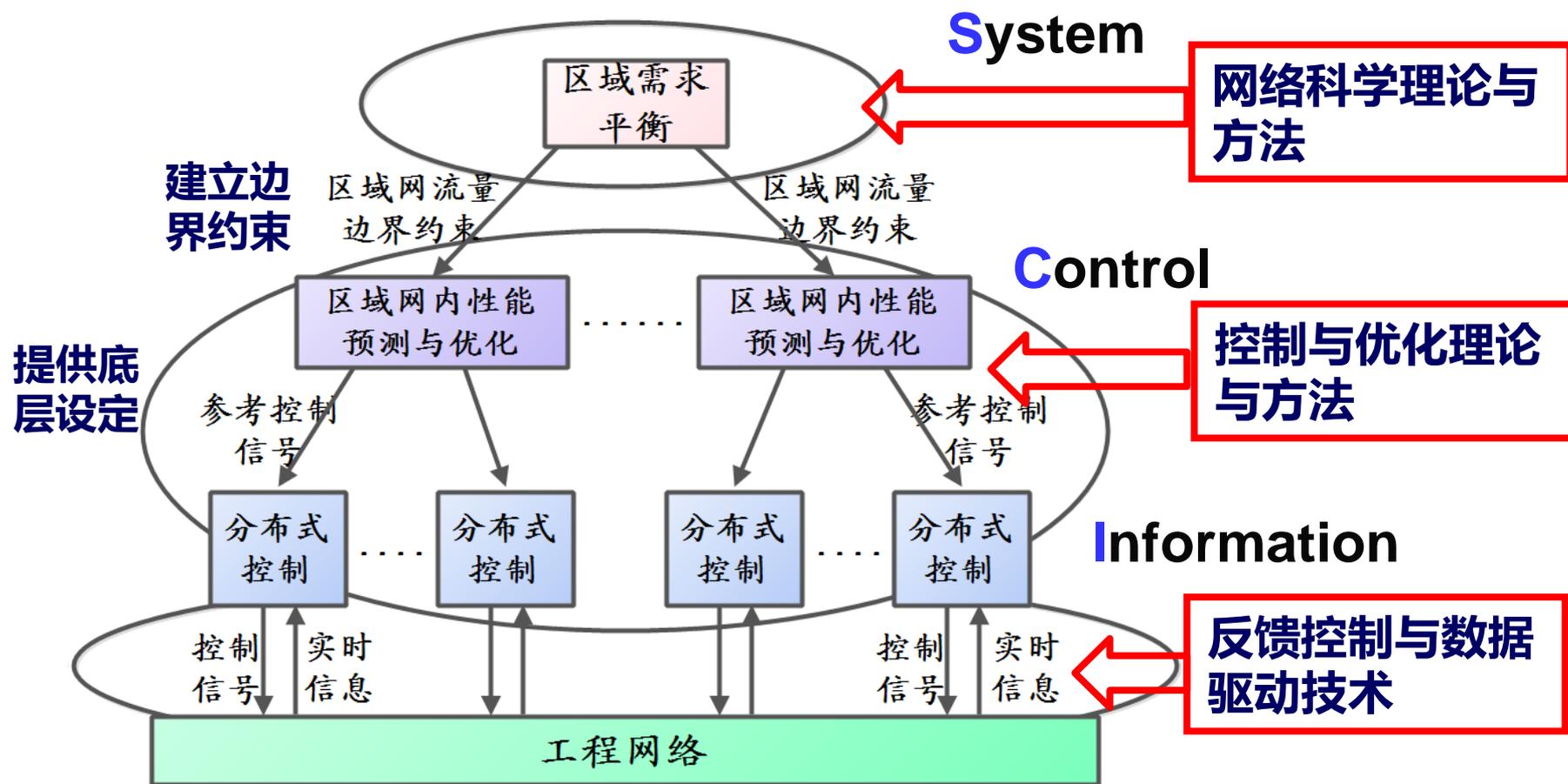
2. 用大系统控制论研究复杂网络的关注重点在何处？如何开展研究？

大系统控制论的**方法论思想**，如**结构分析、纵向信息集结和横向子系统分解**，无论对解决复杂网络的宏观问题还是微观问题都有参考价值

大系统控制论的**定量分析与设计理论**可以**给出复杂网络宏观行为的科学解释**，导致新规律的发现，并**具体落实具体网络的控制和优化方案**。适合于解决复杂网络的精细化分析与设计问题

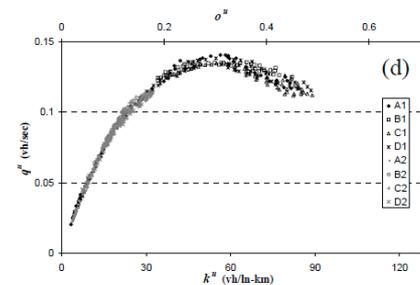
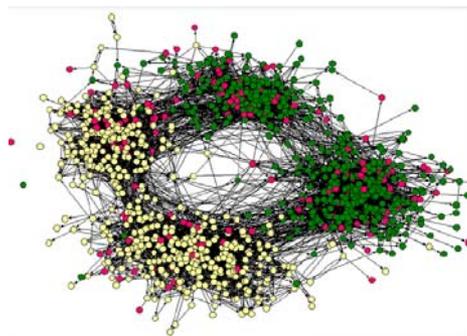
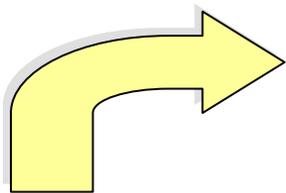
用大系统控制论研究复杂网络时，要注意问题的定位：是针对**有限维**还是**超高维**节点网络，是对已有系统进行分析还是设计控制律，特别要注意**信息的可获取性和算法的可行性**。

3. 对于复杂工程网络，应采用网络科学与控制科学互补的研究框架 SCI框架

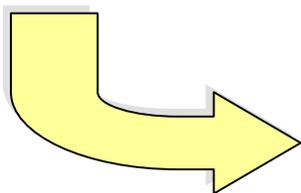
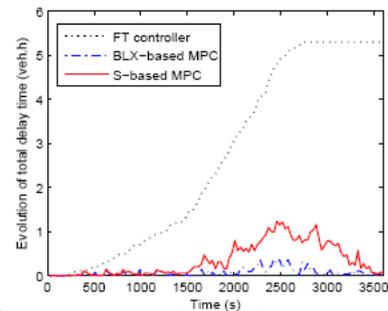
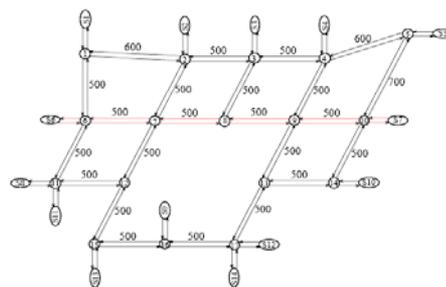
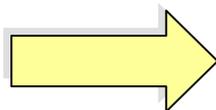


例：大规模城市交通路网

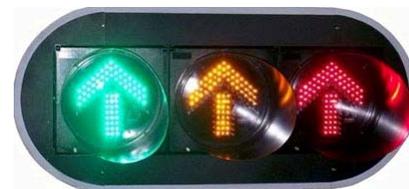
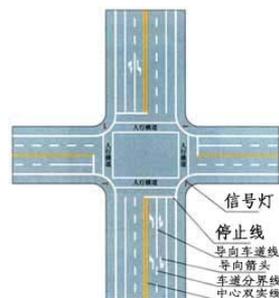
区域交通流平衡



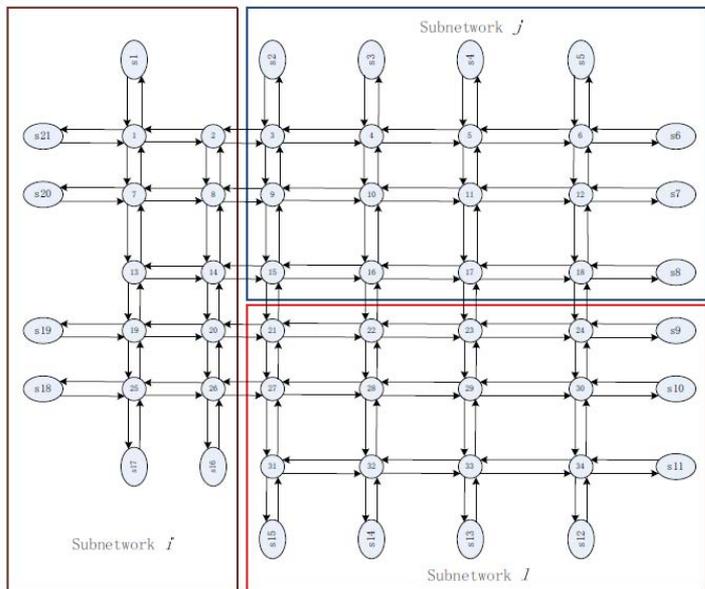
区域内优化控制



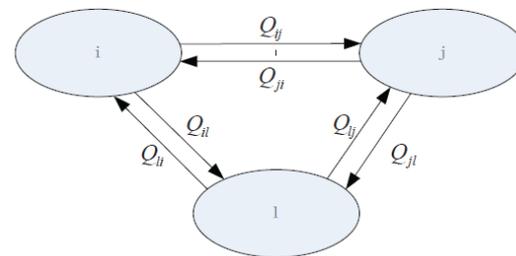
路口信号检测与适应控制



仿真例子



上层



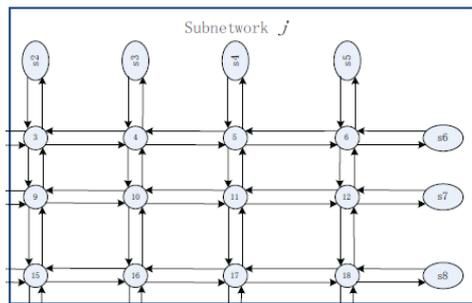
目标：优化区域间流量使各区域流通性最高

$$J = \sum_{p=1}^{N_p} [q_i^w(k+p) + q_j^w(k+p) + q_l^w(k+p)]$$

约束 车辆数与流量动态平衡关系
流量约束

$$\begin{aligned} q_i^w(k+p) &= f_i(N_i(k+p)) \\ q_j^w(k+p) &= f_j(N_j(k+p)) \\ q_l^w(k+p) &= f_l(N_l(k+p)) \end{aligned} \quad \text{车辆数与流通性关系}$$

中层



目标：各区域在上层流量约束下优化交通控制信号使车辆总行驶时间最少

$$\min_g J_i = \min r_1 \cdot TTS_i + r_2 \cdot \Delta Q$$

约束 交通流动力学方程
交通控制信号约束方程

仿真结果比较

集中MPC：全网优化

递阶MPC：区域优化但考虑区域间平衡

分散MPC：区域优化不考虑区域间平衡

控制算法	分散MPC	递阶MPC	集中MPC
TTS(veh•h)	2.73×10^7	2.62×10^7	2.55×10^7
TDT(veh•h)	10.2×10^5	9.1×10^5	9.0×10^5
NMD(veh/km)	130	124	121
NMF(veh/h)	813	913	880
最多拥堵路段数	47	34	45
CPU Time(sec)	23	24	230

TTS：总花费时间

TDT：总延误时间

NMD：路网平均车密度

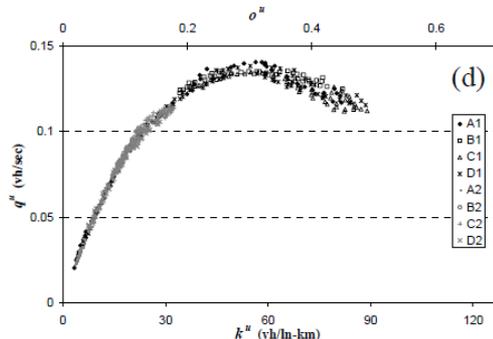
NMF：路网平均车流率

拥堵路段：车辆数占路段容量80%以上

CPU Time：每次优化所用时间

递阶控制的TTS和TDT均优于分散控制，接近集中控制

递阶控制的NMD（密度）适中，但NMF（流通率）明显优于其它控制



原因：

集中控制通过限制车辆进入来降低TTS，但同时限制了NMD，未能充分利用路网的最大容量

分散控制不限制车辆进入，提高了NMD但存在拥堵风险

递阶控制通过协调进入车辆，既限制了车辆进入数，防止了拥堵产生，又尽可能允许更多车辆进入，充分利用了路网的最大容量

谢谢关注！