协作导航和运动中的非线性控制问题和方法---

随机极值搜索方法

刘淑君

东南大学

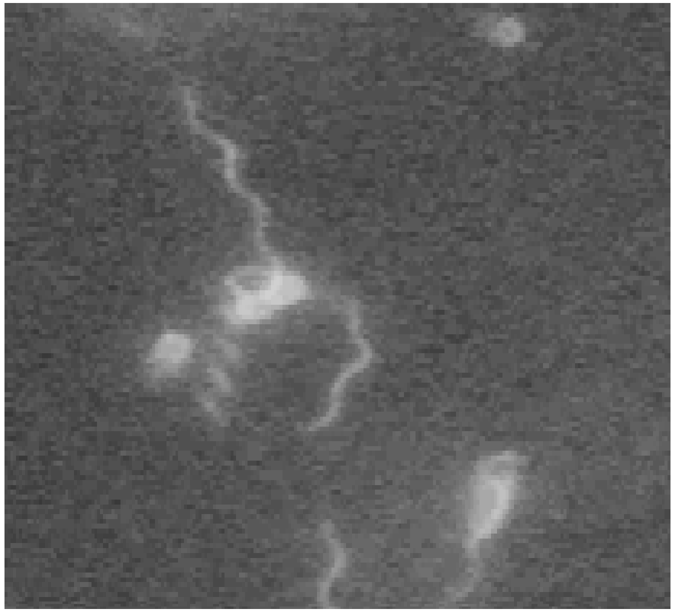
青岛 2013年4月19日

主要内容

- 研究背景
- 随机极值搜索
- 非完整约束下的车辆的随机源搜索
- 总结

研究背景---随机源搜索

- 无法获得位置信息的信号源搜索
  (如：在水下、冰下、洞穴中运动的车辆或机器人搜索释放信号的源-----无GPS/INS)
- 生物中的例子: **E. Coli** chemotaxis



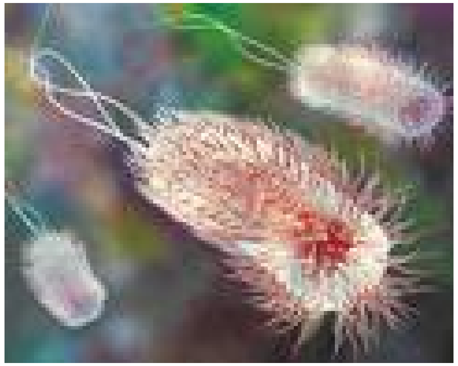
(Credit: Howard Berg, Harvard University)

觅食行为采用相互交替的两种运动:

Run: 直线运动

Tumble: 停止向前运动而转动

随机性



研究背景---极值搜索(Extremum Seeking)

- 极值搜索 (ES)
  - 基于非模型
  - 仅需很少的信息

(20世纪中期应用上流行⟶几乎停滞⟶2000年以后研究兴趣持续增长)

梯度估计: 周期扰动

梯度估计: 随机扰动

- 随机极值搜索

离散时间的简单情形 (Manzie et al.)

连续时间？

……

研究背景---极值搜索算法的稳定性证明工具

- 平均方法 (M. Krstic & H. H. Wang, Automatica, 2000)
- 随机平均方法

原系统: $\dfrac{dX_t^\varepsilon}{dt} = a(X_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}), \qquad X_0^\varepsilon = x$

$\xi_t \in R^m$: 定义在 (Ω, F, P)上的随机过程

平均系统: $\dfrac{d\bar{X}_t}{dt} = \bar{a}(\bar{X}_t), \qquad \bar{X}_0 = x$

$\bar{a}(x)$: $a(x, \xi_t)$在某种概率意义下的平均函数

随机平均: 当ε充分小时, X_t^ε以某种概率意义接近$\bar{X}_t$.

研究背景---已有随机平均结果

- 有限时间水平上的随机平均 $\longrightarrow$ 逼近
- 无穷时间水平上的随机平均 $\longrightarrow$ 稳定性

(Blankenship, Freidlin, Skorokhod, Khasminskii, Korolyuk, et al.)

- 非线性向量场: 全局Lipschitz
- 平衡点: $a(0,\bullet)\equiv 0$
- 平均系统: 全局指数稳定
- 扰动过程: 紧状态空间

约束条件强、不实用

问题：在较弱条件的随机平均?

原系统:局部Lipschitz ,无平衡点条件

平均系统: 局部指数稳定

主要内容

- 研究背景
- 随机极值搜索
- 非完整约束下的车辆的随机源搜索
- 总结

随机极值搜索---静态映射

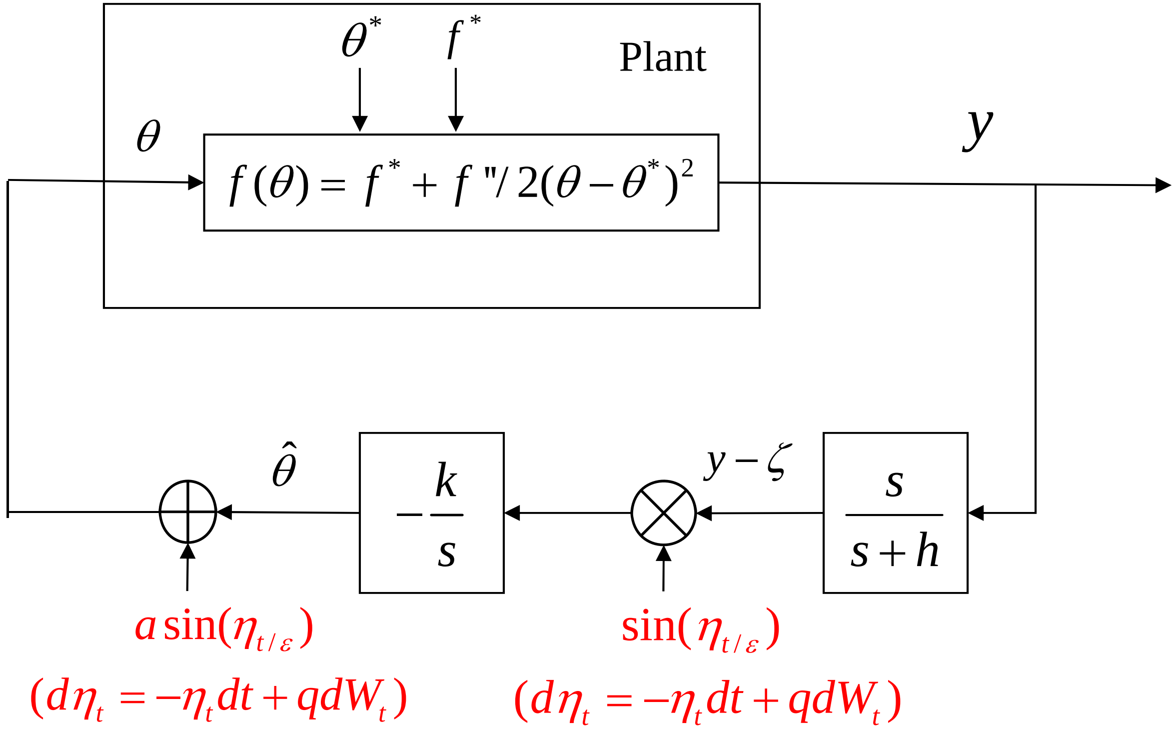
静态映射: $f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2$ 且 $f''>0$ (*)

输出: $y = f(\theta)$

极值搜索: 设计算法使$\theta(t) - \theta^*$尽可能的小从而输出

$y(t) = f(\theta(t))$趋近于最小值 f^*

随机极值搜索---搜索机制



y :要最小化的输出　　k :积分器 $\frac{1}{s}$ 的适应正增益

f^*: 映射的最小值　　a : 探索信号的振幅

ε : 探索信号的小参数　θ^* : 未知参数

h: 高通滤波 $\frac{s}{s+h}$ 的截频　$\hat{\theta}$: θ^* 的估计

随机极值搜索---搜索算法

参数更新算法:
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{dt} = -k\sin(\eta_{t/\varepsilon})(y-\zeta) \\ \dfrac{d\zeta}{dt} = -h\zeta + hy \end{cases} \qquad (**)$$

随机激励:
$$\begin{cases} \theta = \hat{\theta} + a\sin(\eta_{t/\varepsilon}) \\ d\eta_t = -\eta_t dt + q dW_t \end{cases}$$

Ornstein-Uhlenbeck (OU) 过程: 连续、马氏、遍历，俗称有色噪声

估计误差: $\tilde{\theta} = \theta^* - \hat{\theta}$

输出误差: $e = \dfrac{h}{s+h}[y] - f^*$

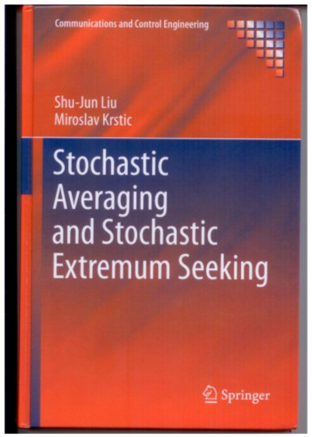
随机极值搜索---待分析的系统

误差系统: → 局部 Lipschitz, 不满足平衡条件

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\theta}^{\varepsilon}}{dt} = k\underline{\sin(\eta_{t/\varepsilon})}(f''/2(a\underline{\sin(\eta_{t/\varepsilon})}-\tilde{\theta}^{\varepsilon})^2-e^{\varepsilon}), \quad \tilde{\theta}^{\varepsilon}(0)=\theta_0 \\ \dfrac{de^{\varepsilon}}{dt} = h(f''/2(a\underline{\sin(\eta_{t/\varepsilon})}-\tilde{\theta}^{\varepsilon})^2-e^{\varepsilon}), \quad e^{\varepsilon}(0)=e_0 \end{cases}$$

$$[\ (\eta_t, t\geq 0): \quad d\eta_t = -\eta_t + qdW_t \text{ 且 } \mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}q}e^{-x^2/q^2}dx]$$

稳定性分析工具：随机平均理论



S. -J. Liu and M. Krstic，Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking, Springer, 2012.

随机极值搜索---待分析的系统

误差系统: → 局部 Lipschitz, 不满足平衡条件

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\tilde{\theta}^{\varepsilon}}{dt} = k\underline{\sin(\eta_{t/\varepsilon})}(f''/2(a\underline{\sin(\eta_{t/\varepsilon})}-\tilde{\theta}^{\varepsilon})^2-e^{\varepsilon}), \quad \tilde{\theta}^{\varepsilon}(0)=\theta_0 \\
\dfrac{de^{\varepsilon}}{dt} = h(f''/2(a\underline{\sin(\eta_{t/\varepsilon})}-\tilde{\theta}^{\varepsilon})^2-e^{\varepsilon}), \quad e^{\varepsilon}(0)=e_0
\end{cases}
$$

$[\ (\eta_t, t\geq 0):\quad d\eta_t = -\eta_t + q dW_t$ 且 $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{\pi q}} e^{-x^2/q^2} dx]$

平均系统:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\tilde{\theta}^{ave}}{dt} = -kf''/2a(1-e^{-q^2})\tilde{\theta}^{ave}, \quad \tilde{\theta}^{ave}(0)=\theta_0 \\
\dfrac{de^{ave}}{dt} = h(f''a^2/4(1-e^{-q^2}) + f''\tilde{\theta}^{ave2} - e^{ave}), \quad e^{ave}(0)=e_0
\end{cases}
$$

随机极值搜索---平均系统的稳定性

平均系统:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\theta}^{ave}}{dt} = -kf'' / 2a(1-e^{-q^2})\tilde{\theta}^{ave}, & \tilde{\theta}^{ave}(0) = \theta_0 \\ \dfrac{de^{ave}}{dt} = h(f''a^2/4(1-e^{-q^2}) + f''/2\tilde{\theta}^{ave2} - e^{ave}), & e^{ave}(0) = e_0 \end{cases}$$

平衡点: $\left(0, \dfrac{a^2 f''}{4}(1-e^{-q^2})\right)$ ---局部指数稳定

分析误差系统的解性质：随机平均

随机极值搜索---稳定性分析

定理：考虑在参数更新率(**)作用下的静态映射 (*) . 则存在常数$r, c, \gamma > 0$ 及函数$T(\varepsilon):(0,\varepsilon_0) \to N$，使得对 $\forall \ |\Lambda^\varepsilon(0)| < r, \ \forall \delta > 0,$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ \inf \left\{ t \geq 0 : |\Lambda^\varepsilon(t)| > c|\Lambda^\varepsilon(0)| e^{-\gamma t} + \delta \right\} = \infty, \quad \text{a.s.,}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P\left\{ |\Lambda^\varepsilon(t)| \leq c|\Lambda^\varepsilon(0)| e^{-\gamma t} + \delta, \forall t \in [0, T(\varepsilon)] \right\} = 1 \text{ 且 } \lim_{\varepsilon \to 0} T(\varepsilon) = \infty,$$

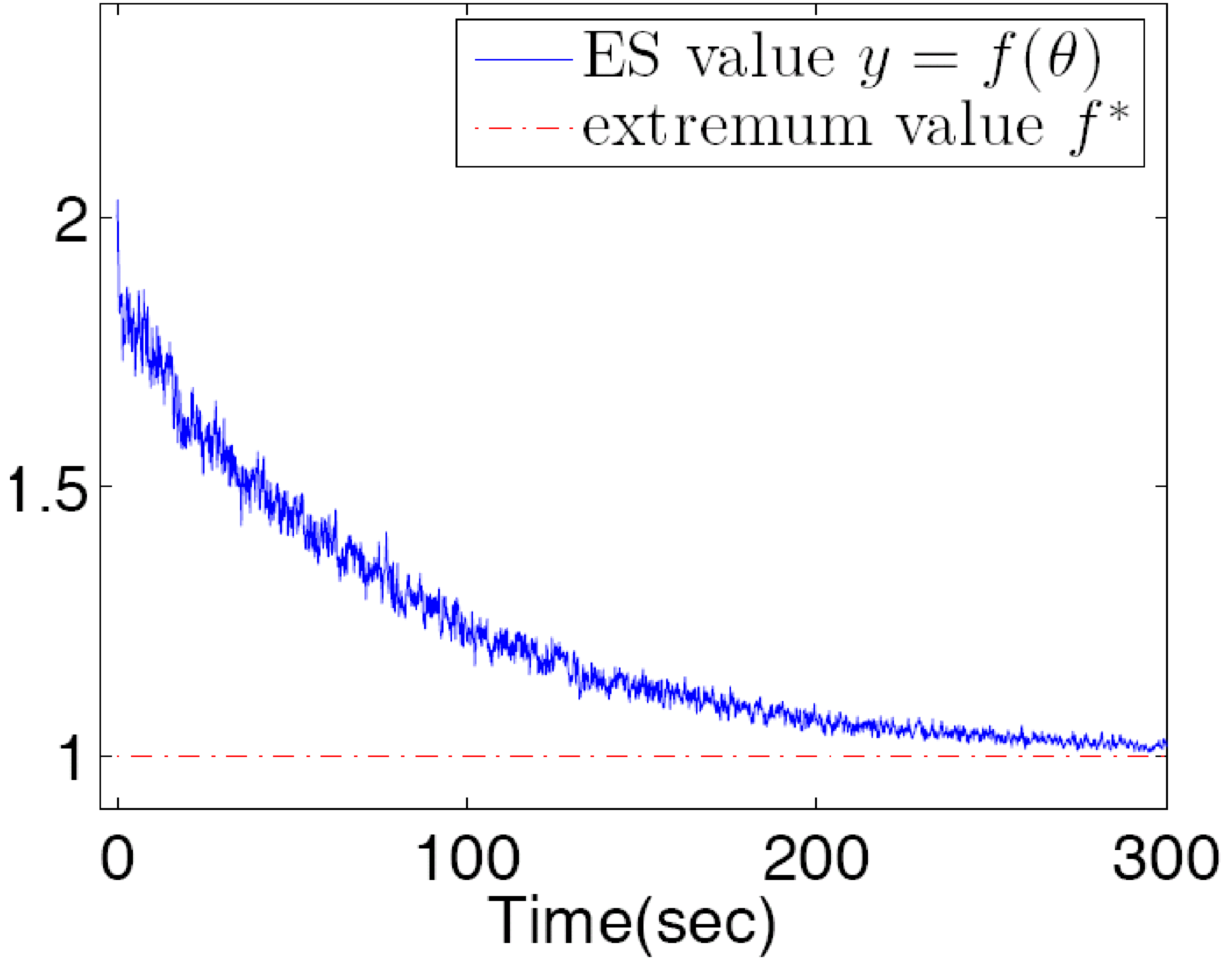
其中 $\Lambda^\varepsilon(t) \triangleq (\tilde{\theta}^\varepsilon(t), e^\varepsilon(t)) - \left(0, a^2 f''/4(1-e^{-q^2})\right).$

输出性能:

(i) $|y(t) - f^*| \leq O(\delta^2) + O(a^2) + Ce^{-2\gamma t}$ for $\forall t \leq \tau_\varepsilon^\delta$ 且 $\lim_{\varepsilon \to \infty} \tau_\varepsilon^\delta = \infty$, a.s.

(ii) $\lim_{\varepsilon \to \infty} P\left\{ |y(t) - f^*| \leq O(\delta^2) + O(a^2) + Ce^{-2\gamma t}, \forall t \in [0, T(\varepsilon)] \right\} = 1$ 且 $\lim_{\varepsilon \to \infty} T(\varepsilon) = \infty$

随机极值搜索---仿真结果



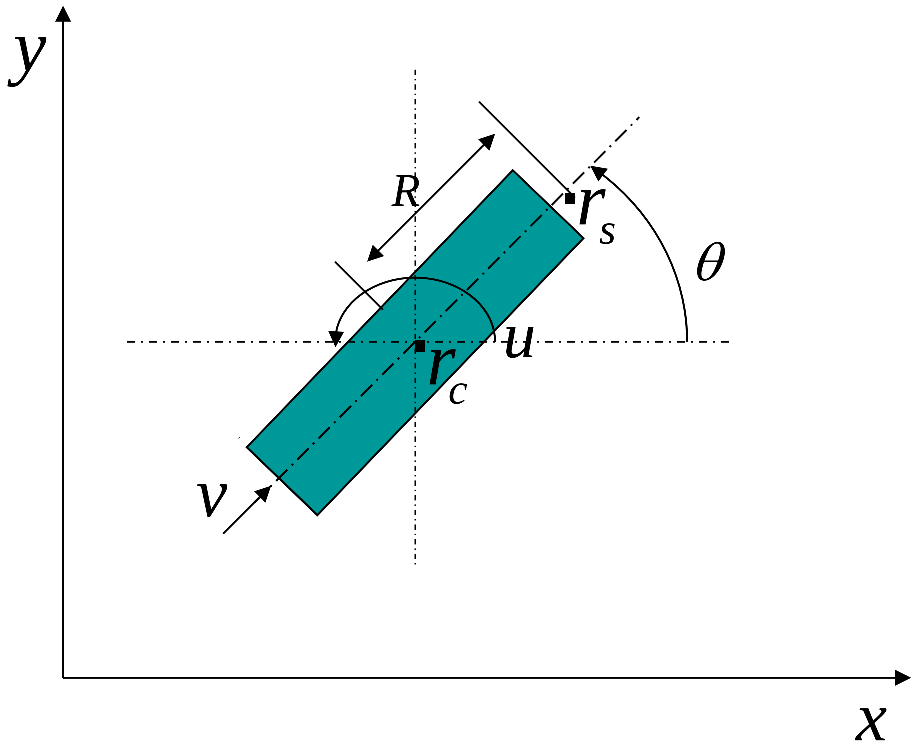
$f^* = 1, f'' = 1, \theta^* = 0; a = 0.1, h = k = q = 1, \varepsilon = 0.25;$

$\tilde{\theta}^{\varepsilon}(0) = 1, e^{\varepsilon}(0) = 0.0032, \hat{\theta}(0) = -1, \zeta(0) = 1.0032$

主要内容

- 研究背景
- 随机极值搜索
- 非完整约束下的车辆的随机源搜索
- 总结

随机源搜索---车辆模型



车辆模型： $\dot{r}_c = ve^{j\theta},$

$$\dot{\theta} = u$$

传感器位置： $r_s = r_c + Re^{j\theta}$

随机源搜索---问题描述

控制目标: 寻找释放信号的源

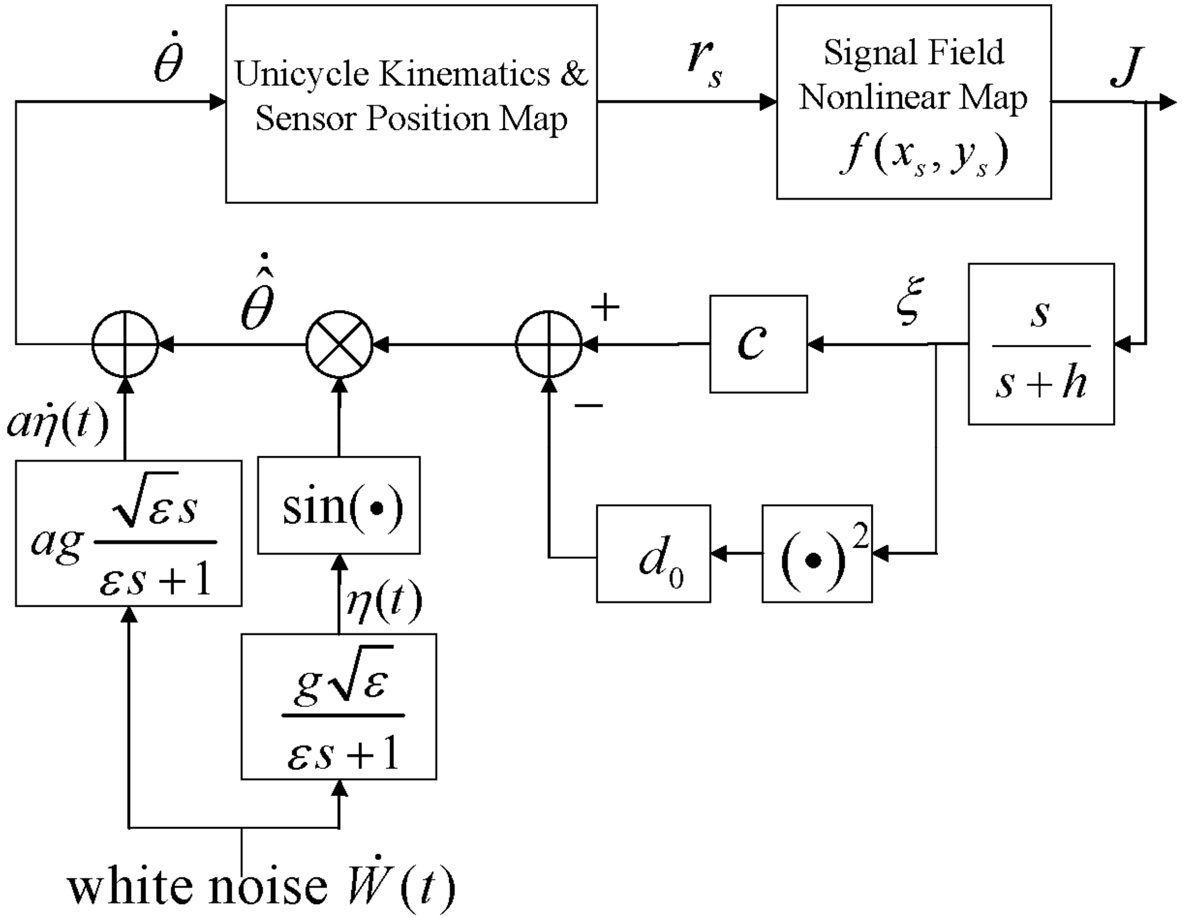
不可获得的信息: 车辆的位置
源的位置
信号场空间分布

可获得的信息:　来自源的数值信号
(如：化学或生物物质的浓度，电磁、声音、热能、雷达信号)

随机极值搜索方法

随机源搜索---随机极值搜索机制

假设信号场根据未知非线性映射$J = f(r(x, y))$分布，具有孤立的局部最大值 $f^* = f(r^*)$.车辆传感器仅能感知J.



随机源搜索---极值搜索控制设计

极值搜索控制律:

$$v = \text{constant} = V_c,$$

$$\dot{\theta} = a\dot{\eta} + c\xi\sin(\eta) - d_0\xi\sin(\eta),$$

$$\xi = \frac{s}{s+h}[J]\text{: 传感器读数 } J\text{经高通滤波的输出;}$$

$$\eta = \frac{\mathrm{g}\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon \mathrm{s}+1}[\dot{W}];\ a, c, d_0, g, h > 0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

也可改写为:

$$d\theta = -\frac{a}{\varepsilon}\eta dt + (c\xi - d_0\xi^2)\sin(\eta)dt + \frac{ag}{\sqrt{\varepsilon}}dW,$$

$$d\eta = -\frac{1}{\varepsilon}\eta dt + \frac{g}{\sqrt{\varepsilon}}dW$$

随机源搜索---闭环系统

假设信号场的分布为：$J = f(r_s) = f^* - q_r |r_s - r^*|^2$.

定义输出误差变量：$e = \frac{h}{s+h}[J] - f^*$.

则闭环系统为

$$dr_c = V_c e^{j\theta} dt,$$

$$d\theta = -\frac{a}{\varepsilon}\eta dt + (c\xi - d_0\xi^2)\sin(\eta)dt + \frac{ag}{\sqrt{\varepsilon}}dW,$$

$$de = h\xi dt, \quad (\xi = -(q_r |r_s - r^*|^2 + e))$$

$$r_s = r_c + Re^{j\theta},$$

$$d\eta = -\frac{1}{\varepsilon}\eta dt + \frac{g}{\sqrt{\varepsilon}}dW.$$

随机源搜索---稳定性结果

定理：考虑闭环系统

$$dr_c = V_c e^{j\theta} dt,$$

$$d\theta = -\frac{a}{\varepsilon}\eta dt + (c\xi - d_0\xi^2)\sin(\eta)dt + \frac{ag}{\sqrt{\varepsilon}}dW, \quad (I_1(a,g) = e^{-a^2g^2/4},$$

$$de = h\xi dt, \quad (\xi = -(q_r|r_s - r^*|^2 + e)) \qquad I_2(a,g) = 1/2[e^{-(a-1)^2g^2/4} - e^{-(a-1)^2g^2/4}],$$

$$r_s = r_c + Re^{j\theta}, \qquad \rho = \sqrt{V_c I_1(a,g)/2q_r cRI_2(a,g))}$$

$$d\eta = -\frac{1}{\varepsilon}\eta dt + \frac{g}{\sqrt{\varepsilon}}dW,$$

其中 $a, c, d_0, g, h > 0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,选择$h$ 使得

$$2V_c I_1(a,g) I_2(a,g) + hR(I_2(2a,g) - 2I_1(a,g)I_2(a,g)) > 0.$$

如果初始条件使得下面的数量充分小,

$$||r_c(0) - r^*| - \rho|, \quad |e(0) + q_r(R^2 + \rho^2)|,$$

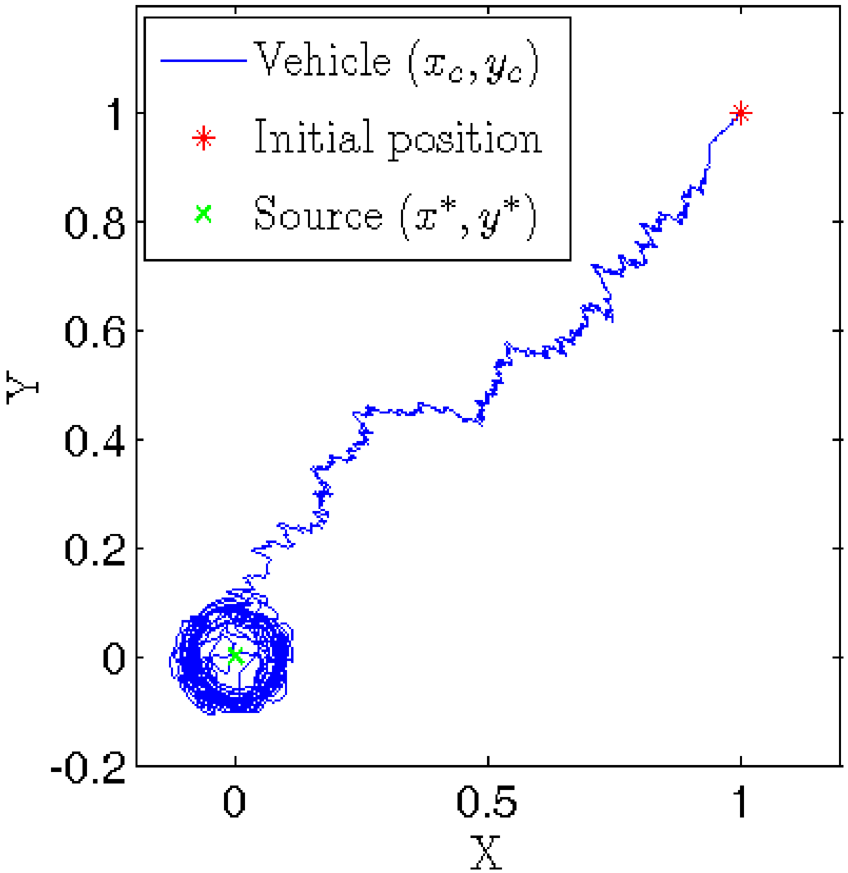
$$|\theta(0) - \arg(r^* - r_c(0)) + \pi/2| \ \text{ or } \ |\theta(0) - \arg(r^* - r_c(0)) - \pi/2|,$$

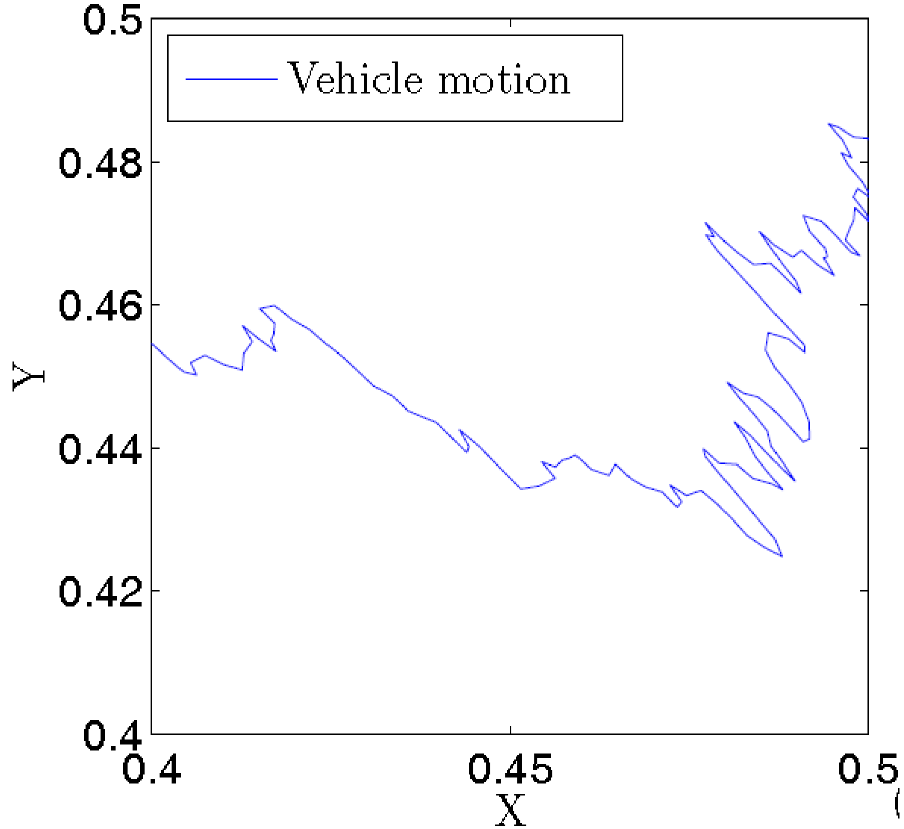
则存在常数$C_0, \gamma_0 > 0$和函数$T(\varepsilon):(0,\varepsilon_0) \to N$使得对 $\forall \delta > 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \inf\{t \ge 0: \ ||r_c(t) - r^*| - \rho| > C_0 e^{-\gamma_0 t} + \delta\} = \infty, \ a.s.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\{||r_c(t) - r^*| - \rho| \le C_0 e^{-\gamma_0 t} + \delta, \forall t \in [0, T(\varepsilon)]\} = 1 \text{ 且 } \lim_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon) = \infty.$$

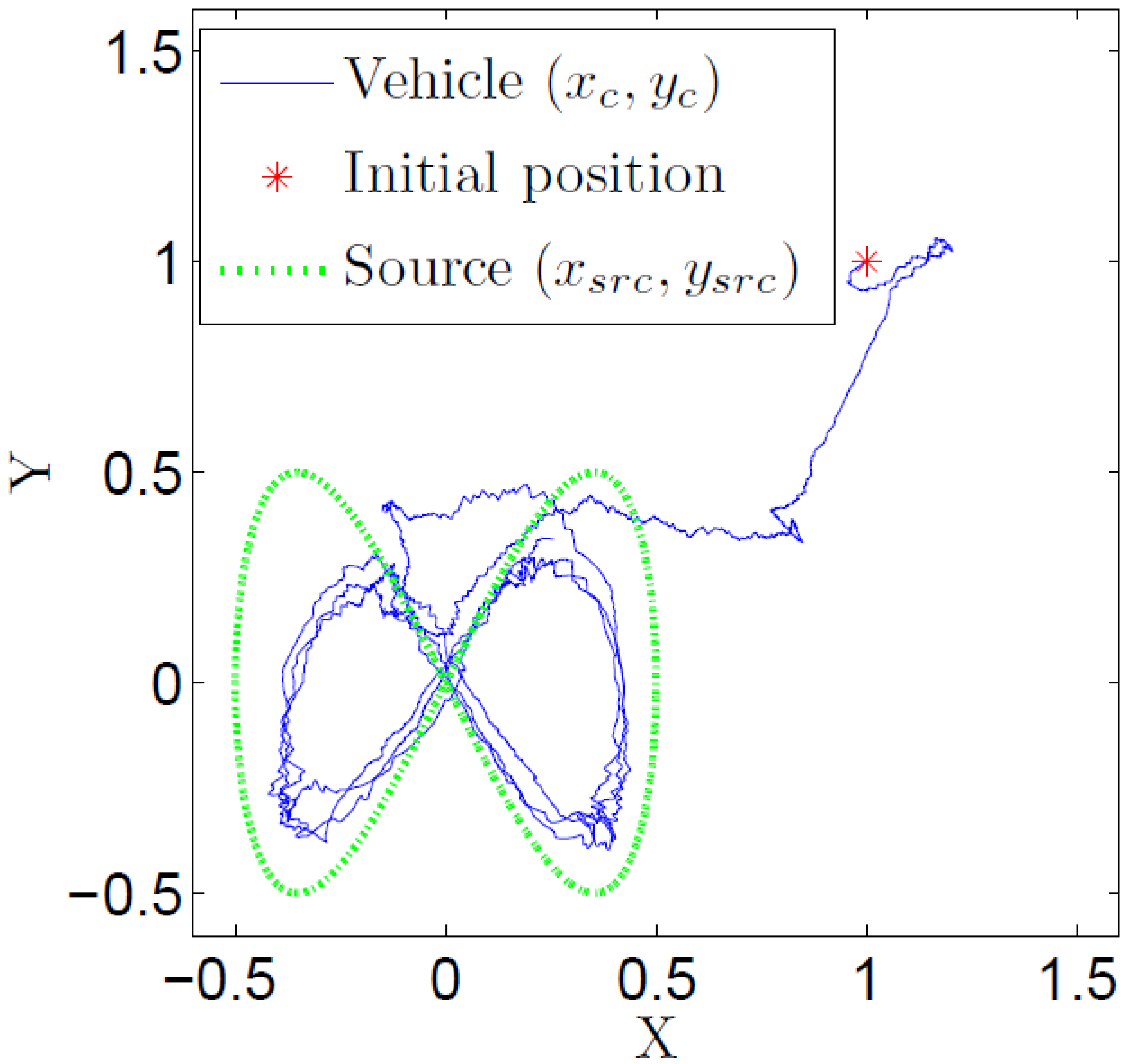
随机源搜索---仿真结果





static source: $r^* = (0, 0)$

随机源搜索---仿真结果

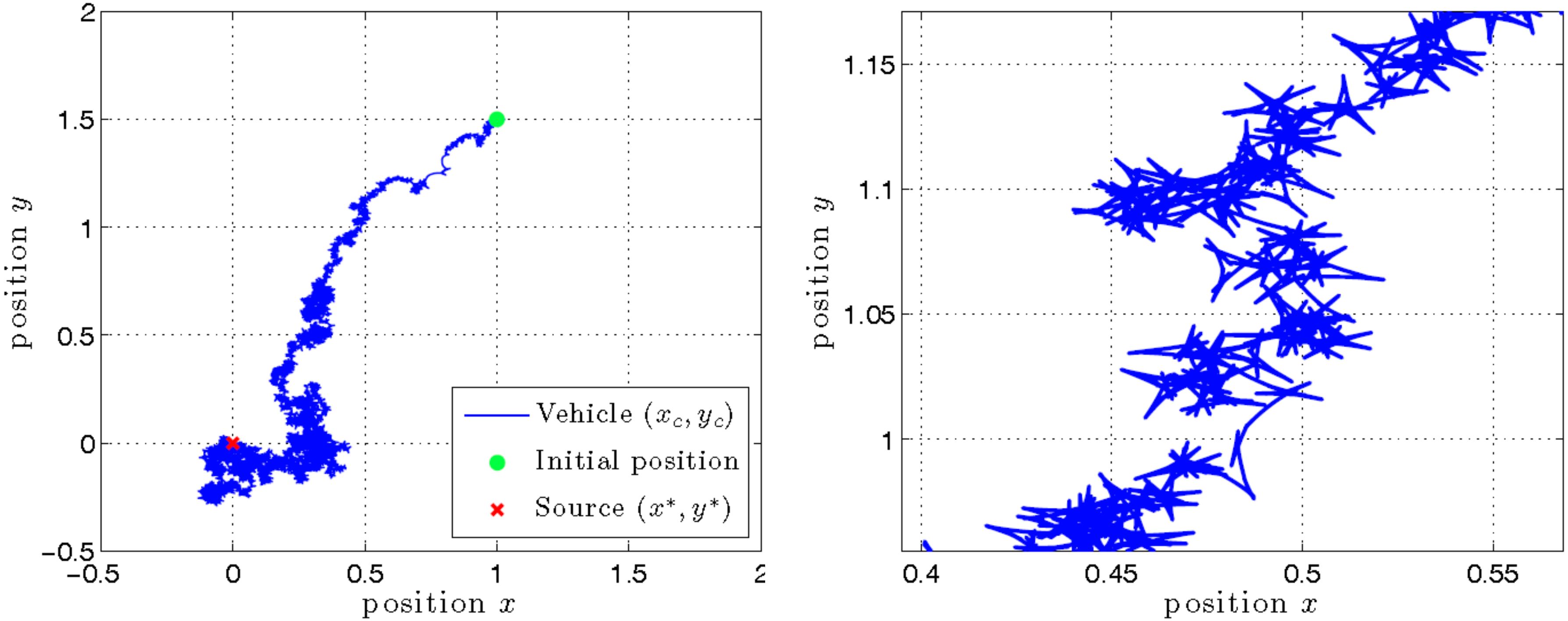


moving source:

$$x_{src}(t) = 0.5\sin(0.13t),$$

$$y_{src}(t) = 0.5\sin(0.26t)$$

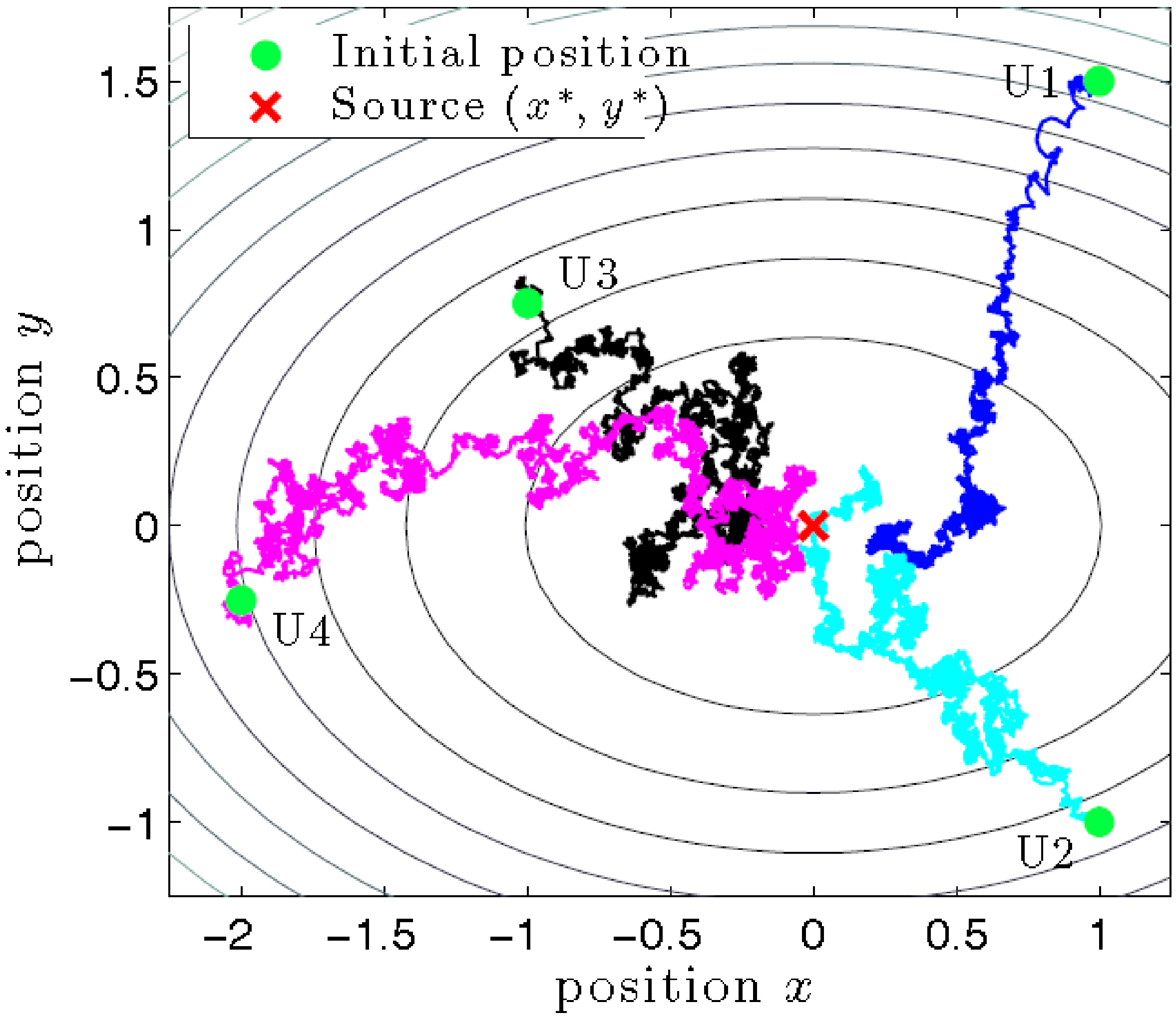
随机源搜索---调节向前速度



$$J = 1 - \frac{1}{2}(x_c - x^*)^2 - \frac{1}{4}(y_c - y^*)^2, \varepsilon = 0.05, a = 0.025, c = 25,$$

$$g = 0.6, \omega_0 = 5, (x^*, y^*) = (0,0), (x_c(0), y_c(0)) = (1,1.5)$$

随机源搜索---调节向前速度



车辆数　n=4

总结

- 随机极值搜索方法的理论研究
  - 稳定性分析工具--- 随机平均理论
  - 静态映射的随机极值搜索
  - ……
- 随机极值搜索方法的应用研究
  - 非完整约束下的车辆的随机源搜索
  - 非合作动态博弈中的随机纳什平衡点搜索
  - ……